

۱ در کیسه‌ای شش مهره قرمز، چهار مهره آبی و پنج مهره سبز قرار داشت. دو مهره از کیسه خارج کردیم که یکی آبی و دیگری سبز بود. احتمال آن که مهره سوم که به تصادف از کیسه خارج می‌شود، مهره‌ای قرمز باشد، کدام است؟

$\frac{5}{13}$ (۴)

$\frac{2}{5}$ (۳)

$\frac{6}{13}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۲ بناست در یک مسابقه فوتبال زنده پناستی با پرتاب یک سکه از بین ابراهیم و داریوش انتخاب شود. اگر احتمال گل شدن ضربه پناستی با احتمال گل نشدن آن یکسان باشد، احتمال آن که ابراهیم پناستی را گل کند کدام است؟

$\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۳ اگر $A = \{2, 4, 5, 9\}$ و $B = \{4, 7, 8, 9\}$ و $C = \{4, 5, 8\}$ باشد، حاصل $(C \cup B) - [(A - B) \cup (B - C)]$ با کدام مجموعه برابر است؟

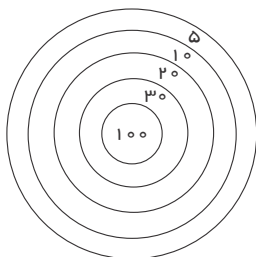
$B = \{x^2 | x \in N, x \leq 3\}$ (۲)

$A = \{4x | x \in N, x < 3\}$ (۱)

$D = \{2x + 4 | x \in N, x < 3\}$ (۴)

$C = \{2x | x \in N, x < 4\}$ (۳)

تیری را کاملاً اتفاقی به سمت هدف زیر پرتاب می‌کنیم و مطمئنیم به هدف برخورد می‌کند. احتمال آن که این پرتاب بیشتر از ۱۰ امتیاز برای پرتاب کننده داشته باشد کدام است؟ در هدف زیر، شعاع کوچک‌ترین دایره ۱۰ cm و شعاع سایر دایره‌ها که دور این دایره قرار گرفته‌اند، به ترتیب ۲۰، ۳۰، ۴۰ و ۵۰ سانتی‌متر است. دایره‌ها هم‌مرکز هستند و امتیاز هر ناحیه روی آن نوشته شده است.



$\frac{9}{25}$ (۲)

$\frac{16}{25}$ (۱)

$\frac{3}{5}$ (۴)

$\frac{4}{5}$ (۳)

۵ در خانواده‌ای که ۴ فرزند دارد، با کدام احتمال حداکثر ۳ تا از فرزندان پسر هستند؟ بدیهی است ترتیب فرزندان دختر و پسر اهمیت دارد.

$\frac{15}{16}$ (۴)

$\frac{4}{16}$ (۳)

$\frac{3}{16}$ (۲)

$\frac{1}{16}$ (۱)

۶ اگر C و D دو مجموعه باشند، کدام گزینه همواره صحیح است؟ (نمونه دولتی قم ۹۶-۹۵)

$a \in (C \cap D)$ آنگاه $a \in C$ (۲)

$a \in C$ آنگاه $a \in (C \cup D)$ (۱)

$(C \cup D) \subseteq (C \cap D)$ (۴)

$C \subseteq (C \cup D)$ (۳)

۷ در یک کلاس ۴۰ نفری، دانش‌آموزان حداقل یکی از زبان‌های فرانسه یا انگلیسی را می‌دانند. تعداد دانش‌آموزانی که زبان انگلیسی را می‌دانند ۲ برابر تعداد دانش‌آموزانی است که زبان فرانسه را می‌دانند و همچنین ۴ برابر تعداد دانش‌آموزانی است که هر دو زبان را می‌دانند. براین اساس تعداد دانش‌آموزانی که زبان انگلیسی را می‌دانند، چند نفر است؟ (نمونه دولتی - آذربایجان غربی و اردبیل - ۹۵-۹۶)

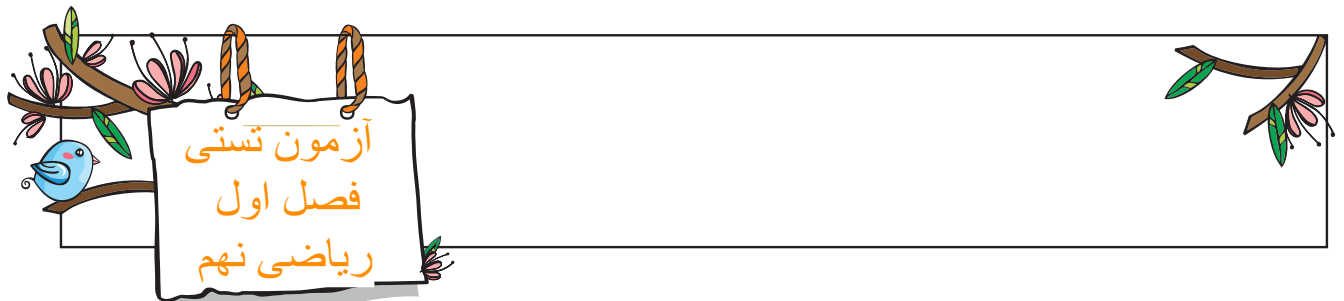
۳۲ (۴)

۳۰ (۳)

۲۴ (۲)

۲۰ (۱)

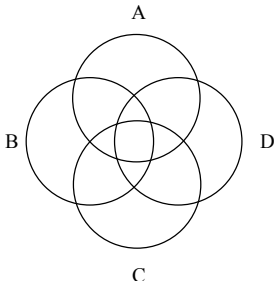
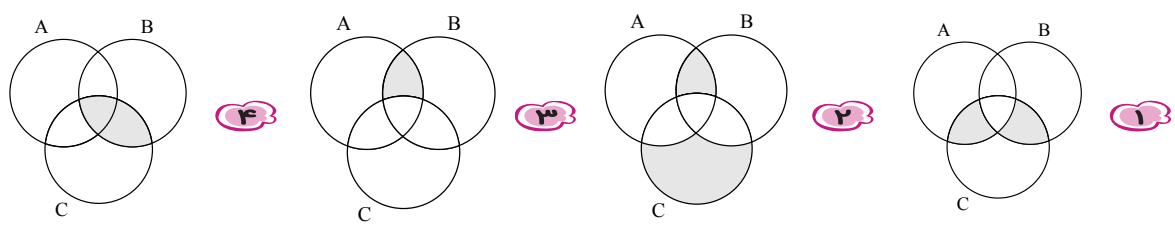




۸	مجموعه‌ی $A = \{x \mid x^2 \in N, x \leq 4\}$ و $B = \{x^2 \mid x \in N, x \leq 4\}$ مفروض است. مجموعه‌ی $A \cap B$ دارای چند زیرمجموعه می‌باشد؟ (نمونه دولتی - آذربایجان غربی و اردبیل ۹۵-۹۶)	۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)
۹	علی می‌خواهد برای مجموعه‌ی کل حالت‌های $S = \{1, 2, 3\}$ ، پیشامدهای مختلفی را بنویسد. او حداکثر برای چند مقدار مختلف احتمال، می‌تواند پیشامد بنویسد؟	۱ (۱)	۳ (۲)	۴ (۳)	۸ (۴)
۱۰	فرض کنید A_i نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد i باشد، به عنوان مثال $A_6 = \{1, 2, 3, 6\}$. مجموعه‌ی $A_{51} \cup A_{52} \cup \dots \cup A_{100}$ چند عضو دارد؟	۱ (۱) ۵۰ عضو	۲ (۲) ۱۰۰ عضو	۳ (۳) ۲۰۰ عضو	۴ (۴) ۳۷۷۵ عضو
۱۱	چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی از اعداد طبیعی وجود دارد که حاصل ضرب اعضای آن در هم، برابر ۴۵ شود؟ (استعدادهای درخشان - ۹۵-۹۶)	یک (۱)	دو (۲)	سه (۳)	چهار (۴)
۱۲	تعداد اعضای مجموعه‌ی $A = \{5x^2 - 3 \mid x \in Z, x^2 - 1 < 18\}$ برابر است با: (نمونه دولتی سیستان و بلوچستان - خراسان جنوبی - خراسان شمالی - هرمزگان ۹۵-۹۶)	۸ (۱)	۴ (۲)	۹ (۳)	۵ (۴)
۱۳	مجموعه‌ی $A = \{x^2 \mid \frac{x}{2} \in N, 2 < x < 10\}$ برابر کدام گزینه است؟	۱ (۱) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	۲ (۲) $\{4, 6, 9\}$	۳ (۳) $\{9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$	۴ (۴) $\{16, 36, 64\}$
۱۴	فرض کنید k یک عدد ثابت است و $A = \{x^2 + k \mid x \in Z, -3 \leq x < k\}$ اگر بدانیم $\{6, 9\} \subseteq A$ آنگاه k عضو کدام مجموعه است؟	۱ (۱) $\{5x + 1 \mid x \in Z\}$	۲ (۲) $\{4x + 3 \mid x \in Z\}$	۳ (۳) $\{2x + 6 \mid x \in Z\}$	۴ (۴) $\{3x - 4 \mid x \in Z\}$
۱۵	در هر یک از گزینه‌های زیر از یک فرض، نتیجه‌ای گرفته شده است. کدام نتیجه‌گیری لزوماً درست نیست؟	۱ (۱) $A \subseteq (A \cap B) \Rightarrow A \subseteq B$	۲ (۲) $A \cap B \subseteq \phi \Rightarrow A = \phi$	۳ (۳) $A \cup B \subseteq \phi \Rightarrow A = B = \phi$	۴ (۴) $B \subseteq (A \cap B) \Rightarrow B - A = \phi$





نمودار ون زیر مربوط به مجموعه‌های $A = \{1, 2, 5, 7\}$، $B = \{2, 3, 4, 5\}$، $C = \{3, 4, 5, 6\}$ و $D = \{3, 5, 6, 7\}$ از ۱۳ ناحیه مجزا تشکیل شده است. چند ناحیه بدون عضو (تهی) در این نمودار وجود دارد؟  ۱۶ ۱ ناحیه ۴ ۲ ناحیه ۵ ۳ ناحیه ۶ ۴ ناحیه ۷	
بخش هاشور خورده کدام یک از نمودارهای زیر نشان دهنده $((A \cap B) \cup C) - ((A \cup B) \cap C)$ است؟  ۱۷ ۱ ناحیه ۱ ۲ ناحیه ۲ ۳ ناحیه ۳ ۴ ناحیه ۴	
اگر $\{x, y, 17\} \cup \{12, 17, z\} = \{7, 12, 17, 5\}$ باشد، به طوری که $x \neq z$ باشد، برای حاصل عبارت $2x - y + z$ کدام گزینه ممکن نیست؟ x ۱۸ ۱ ناحیه ۱۲ ۲ ناحیه ۱۰ ۳ ناحیه ۱۴ ۴ ناحیه ۱۵	
اگر A و B دو مجموعه‌ی غیر تهی باشند و $A \subseteq B$ باشد، کدام رابطه درست است؟ (فارس - خرداد ۹۵) ۱۹ ۱ ناحیه $A \cup B = \emptyset$ ۲ ناحیه $A \cap B = \emptyset$ ۳ ناحیه $A \cap B = A$ ۴ ناحیه $A \cup B = A$	
اگر A مجموعه اعدادی که بر ۳ و B مجموعه اعدادی که بر ۵ بخش پذیر باشند و $x \in (A' \cup B)'$ کدام حکم درست است؟ ۲۰ ۱ ناحیه x بر ۳ و ۵ بخش پذیر است. ۲ ناحیه x بر ۵ بخش پذیر بر ۳ بخش پذیر نیست. ۳ ناحیه x نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر است. ۴ ناحیه x بر ۳ بخش پذیر و بر ۵ بخش پذیر نیست.	

@riazicafe



پاسخنامه تشریحی

گزینه ۲ بعد از خروج به مهره آبی و یک مهره سبز:

$$n(S) = 6 + 3 + 4 = 13$$

$$n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{13}$$

۱

گزینه ۲ برای این ضربه، ۴ حالت وجود دارد:

یک: ابراهیم انتخاب شود و گل بزند. دو: ابراهیم انتخاب شود و گل نزند.
سه: داریوش انتخاب شود و گل بزند. چهار: داریوش انتخاب شود و گل نزند.
یکی از چهار حالت بالا مطلوب است، پس احتمال $\frac{1}{4}$ است.

۲

گزینه ۱

$$A - B = \{2, 5\}$$

$$B - C = \{7, 9\}$$

$$C \cup B = \{4, 5, 7, 8, 9\}$$

$$\Rightarrow (C \cup B) - [(A - B) \cup (B - C)] = \{4, 5, 7, 8, 9\} - \{2, 5, 7, 9\} = \{4, 8\}$$

بررسی گزینه ها:

$$\text{گزینه «۱» } A = \{4, 8\}$$

$$\text{گزینه «۲» } B = \{1, 4, 9\}$$

$$\text{گزینه «۳» } C = \{2, 4, 6\}$$

$$\text{گزینه «۴» } D = \{6, 8, 10\}$$

۳

گزینه ۲

$$\text{مساحت کل هدف} = (50)^2 \pi = 2500\pi (cm^2)$$

$$\text{مساحت قسمت هایی که بیش از ۱۰ امتیاز برای پرتاب کننده می آورند} = (30)^2 \pi = 900\pi (cm^2)$$

$$\text{احتمال مطلوب} = \frac{900\pi}{2500\pi} = \frac{9}{25}$$

۴

گزینه ۴ مجموعه کل حالات ممکن را به شکل (فرزند اول، فرزند دوم، فرزند سوم، فرزند چهارم) نشان می دهیم:

$$S = \{(\text{دختر، دختر، دختر، دختر}), (\text{دختر، دختر، دختر، پسر}), (\text{دختر، دختر، پسر، دختر}), (\text{دختر، دختر، پسر، پسر}), (\text{دختر، پسر، دختر، دختر}), (\text{دختر، پسر، دختر، پسر}), (\text{دختر، پسر، پسر، دختر}), (\text{دختر، پسر، پسر، پسر}), (\text{پسر، دختر، دختر، دختر}), (\text{پسر، دختر، دختر، پسر}), (\text{پسر، دختر، پسر، دختر}), (\text{پسر، دختر، پسر، پسر}), (\text{پسر، پسر، دختر، دختر}), (\text{پسر، پسر، دختر، پسر}), (\text{پسر، پسر، پسر، دختر}), (\text{پسر، پسر، پسر، پسر})\}$$

$$\Rightarrow n(S) = 16$$

احتمال مطلوب:

۵

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{16}$$

$$D \subseteq (C \cup D), C \subseteq (C \cup D)$$

گزینه ۳ برای دو مجموعه‌ی C و D همواره

گزینه ۴ A را مجموعه دانش آموزانی که فرانسه می‌دانند و B را دانش آموزانی که انگلیسی می‌دانند در نظر می‌گیریم.

$$\left. \begin{aligned} n(B) = 2n(A) &\Rightarrow n(A) = \frac{n(B)}{2} \quad (1) \\ n(B) = 4n(A \cap B) &\Rightarrow n(A \cap B) = \frac{n(B)}{4} \quad (2) \\ n(A \cup B) &= 40 \quad (3) \end{aligned} \right\}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \xrightarrow{1,2,3} 40 = \frac{n(B)}{2} + n(B) - \frac{n(B)}{4}$$

$$\Rightarrow 40 = \frac{2n(B) + 4n(B) - n(B)}{4} \Rightarrow 40 = \frac{5n(B)}{4} \Rightarrow n(B) = \frac{4 \times 40}{5} = 32$$

گزینه ۴ ابتدای اعضای دو مجموعه‌ی A و B را می‌نویسیم:

$$A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, \sqrt{16}\}$$

$$= \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, 3, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, 4\}$$

$$B = \{1, 4, 9, 16\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{1, 4\}$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B$ برابر $2^2 = 4$ می‌شود.

گزینه ۳ نکته: همواره مجموعه حالت‌های مطلوب زیرمجموعه‌ای از کل حالت‌ها است.

مطابق نکته: تعداد کل مجموعه پیشامدهایی که می‌توان روی مجموعه $S = \{1, 2, 3\}$ نوشت، برابر تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه یعنی ۸ عدد است.

$$S \text{ زیرمجموعه‌های: } \{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

$\downarrow$ عضو ۰ $\downarrow$ عضو ۱ $\downarrow$ عضو ۲ $\downarrow$ عضو ۳

بنابراین احتمال‌های پیشامدهای علی می‌تواند $\frac{0}{3}$ یا $\frac{1}{3}$ یا $\frac{2}{3}$ یا $\frac{3}{3}$ باشد. یعنی او حداکثر برای ۴ مقدار احتمال می‌تواند پیشامدهای مختلف بنویسد.

گزینه ۲ مجموعه مقسوم‌علیه‌های اعداد ۵۱ تا ۱۰۰، حتماً شامل خود این اعداد می‌باشند همچنین اعداد ۱ تا ۵۰ نیز هر کدام مقسوم‌علیه اعداد ۵۱ تا ۱۰۰ هستند پس در کل این مجموعه ۱۰۰ عضو دارد.

گزینه ۲ زیرمجموعه‌های سه عضوی که حاصل ضرب اعضای آنها در هم برابر ۴۵ می‌شود عبارتند از: $\{1, 15, 3\}$ و $\{5, 9, 1\}$ بقیه زیرمجموعه‌هایی مانند $\{3, 3, 5\}$ اعضای تکراری دارند و دو عضوی حساب می‌شوند.

گزینه ۴ مجموعه A را با اعضایش مشخص می‌کنیم:

$$x^2 - 1 < 18 \Rightarrow x^2 < 19$$

$$\Rightarrow x = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\} \Rightarrow x^2 = \{0, 1, 16, 81, 256\}$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 3 = \{-3, 2, 77, 402, 1277\}$$

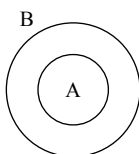
$$\Rightarrow n(A) = 5$$

گزینه ۴ برای این که $\frac{x}{2} \in N$ باشد باید x عددی زوج باشد. برای همین اعداد زوج مابین ۲ و ۱۰ را در نظر می‌گیریم: ۸ و ۶ و ۴. حال با جای گذاری این اعداد در x^2 خواهیم داشت: $A = \{16, 36, 64\}$

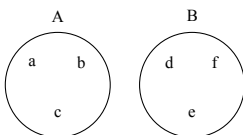
گزینه ۴ باتوجه به راهبرد حدس و آزمایش و بررسی k های مختلف $k = 5$ می‌شود. بنابراین $-3 \leq x < 5$ و در نتیجه اعضای A عبارت‌اند از:
 $A = \{x^2 + 5 | x \in Z, -3 \leq x < 5\} = \{(-3)^2 + 5, (-2)^2 + 5, (-1)^2 + 5, 0^2 + 5, \dots, 4^2 + 5\}$
 $= \{14, 9, 6, 5, \dots, 21\}$
 همان طور که مشاهده می‌شود ۹ اعضای A هستند بنابراین $\{6, 9\} \subseteq A$ است. حال باتوجه به گزینه‌ها در گزینه ۴ عدد ۵ ساخته می‌شود پس k عضو $\{3x - 4 | x \in Z\}$ است.

گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱» اگر مجموعه‌ای زیر مجموعه دیگری باشد، همه‌ی اعضای آن مجموعه در مجموعه دوم هست بنابراین از $A \subseteq (A \cap B)$ نتیجه می‌شود که $A \subseteq B$ است.

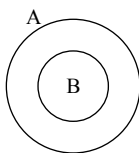


گزینه «۲»: مثال نقضی برای این گزینه شکل روبه‌روست.

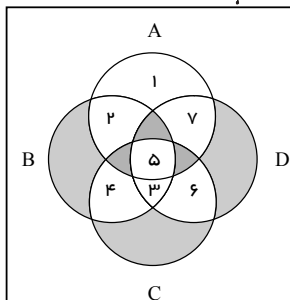


گزینه «۳»: اجتماع A و B تهی شده‌است، پس A و B هیچ کدام هیچ عضوی ندارند و هر دو تهی هستند.

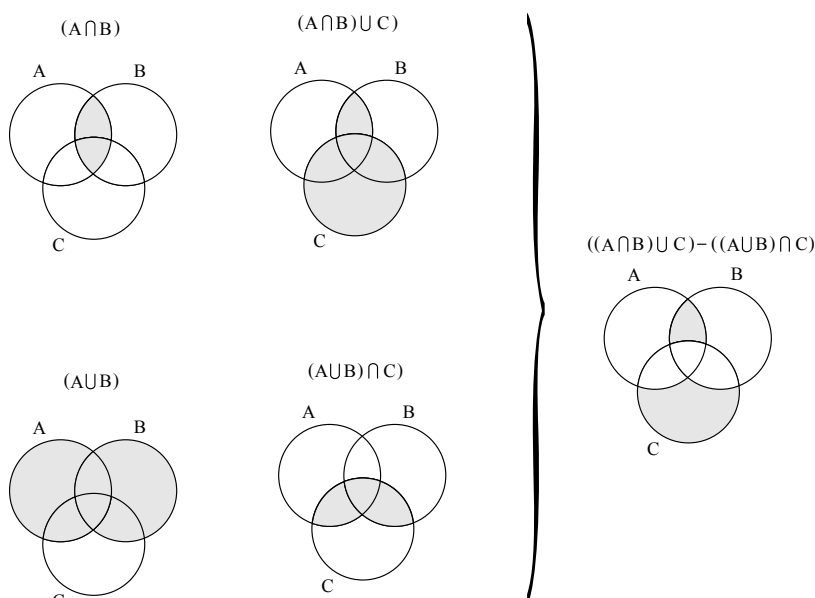
گزینه «۴» چون B زیر مجموعه $A \cap B$ است، باید B باید زیر مجموعه A باشد. پس $B - A$ قطعاً مجموعه‌ای تهی خواهد بود.



گزینه ۳ عضوهای هر کدام از چهار مجموعه داده شده را با توجه به اشتراکات آن‌ها با یک‌دیگر، در نمودار ون جایگذاری می‌کنیم. ناحیه‌های تهی (بدون عضو) را با هاشور مشخص می‌کنیم که ۶ ناحیه هستند:



گزینه ۲



۱۷

گزینه ۴

$$\{12, 17, z\} \cup \{x, y, 17\} = \{12, 17, x, y, z\} = \{7, 12, 17, 5\}$$

می‌دانیم $x \neq z$ است، پس $x = y$ یا $z = y$ است. همچنین به دلیل یکره‌ی بودن x و y و z ، $\{x, y, z\} = \{5, 7\}$ است، که در این صورت یا $x = 5$ و $z = 7$ است یا $x = 7$ و $z = 5$ که با این وصف چهار حالت داریم:

$$\Rightarrow \{x, y, z\} = \{7, 5\}$$

$$۱) x = 5, y = 5, z = 7 \Rightarrow 2x - y + z = 10 - 5 + 7 = 12$$

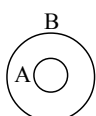
$$۲) x = 7, y = 7, z = 5 \Rightarrow 2x - y + z = 14 - 7 + 5 = 12$$

$$۳) x = 5, y = 7, z = 7 \Rightarrow 2x - y + z = 10 - 7 + 7 = 10$$

$$۴) x = 7, y = 5, z = 5 \Rightarrow 2x - y + z = 14 - 5 + 5 = 14$$

۱۸

گزینه ۳ طبق نمودار ون داریم:



$$A \cup B = B$$

$$A \cap B = A$$

۱۹



@riazicafe

گزینه ۴

$$A = \{۳, ۶, ۹, ۰\} , B = \{۵, ۱۰, ۱۵, ۰\}$$

$$x \in (A' \cup B)' = (A')' \cap B' = A \cap B' = A - B$$

x عضو A بوده و x عضو B نمی باشد.

۲۰







۱	بین اعداد $۲۷^{۱۵}$, $۳^{۲۵}$, $۳۲^۸$, $۲^{۳۵}$ بزرگترین عدد کدام است؟	$۲۷^{۱۵}$ (۱)	$۳^{۲۵}$ (۲)	$۳۲^۸$ (۳)	$۲^{۳۵}$ (۴)
۲	چند جمله از جمله‌های زیر درست است؟ (الف) مجموعه اعداد گویا را می‌توان با محور اعداد نمایش داد. (ب) اگر عدد n مربع کامل نباشد، $\sqrt{n}$ گنگ است. (ج) به ازای هر عدد حقیقی a داریم: $ a + a > ۰$ (د) برای هر دو عدد حقیقی a و b همواره داریم: $ a + b = a + b $	یکی (۱)	دو تا (۲)	سه تا (۳)	چهار تا (۴)
۳	اگر a عددی گنگ و b عددی گویا باشد، کدام عبارت زیر حتماً درست است؟	$a + b \in Q'$ (۱)	$\frac{b}{a} \in Q'$ (۲)	$ab^r \in Q'$ (۳)	$ba^r \in Q'$ (۴)
۴	عبارت $\frac{a-7}{3 a +4}$ به ازای چه مقادیری مثبت است؟	$A = \{a \in \mathbb{R} a < 7\}$ (۱)	$a \in \mathbb{R}$ (۳)	$A = \{a \in \mathbb{R} a > 7\}$ (۲)	$a \in \mathbb{Z}$ (۴)
۵	اگر روی محور اعداد، تمامی نقاطی که اعداد گنگ بین $۲\sqrt{2}$ و $-۳\sqrt{3}$ را نمایش می‌دهند رنگ کنیم، چه تعداد از جملات زیر صحیح است؟ (الف) نقاط رنگ شده، یک پاره‌خط به وجود می‌آورند. (ب) تعداد نقاط رنگ شده، بی‌شمار است. (ج) تعداد نقاطی که رنگ نشده‌اند، بی‌شمار است. (د) تمام نقاطی که اعدادی با بی‌شمار رقم اعشاری را نمایش می‌دهند، رنگ شده‌اند.	۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)
۶	کدام گزینه صحیح است؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی - کرمانشاه ۹۳ - ۹۲) (۱) مربع هر عدد صحیح، عددی طبیعی است. (۲) هر عدد مرکب، عددی حقیقی است. (۳) حاصل جمع دو عدد گنگ، نمی‌تواند عددی گویا باشد. (۴) اگر هر عدد اولی را با یک جمع کنیم، عددی مرکب می‌شود.	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
۷	حاصل عبارت زیر را بدست آورید. $\frac{5}{2 \times 3} - \frac{7}{3 \times 4} + \frac{9}{4 \times 5} - \frac{11}{5 \times 6} + \frac{13}{6 \times 7} - \frac{15}{7 \times 8} =$	$\frac{3}{8}$ (۱)	$\frac{1}{2}$ (۲)	$\frac{3}{4}$ (۳)	$\frac{1}{8}$ (۴)





۸	کسر عدد $\overline{5,005}$ را به دست آورید.	$\frac{5000}{999}$ (۱)	$\frac{5005}{999}$ (۲)	$\frac{5000}{1000}$ (۳)	$\frac{5000}{900}$ (۴)
---	---	------------------------	------------------------	-------------------------	------------------------

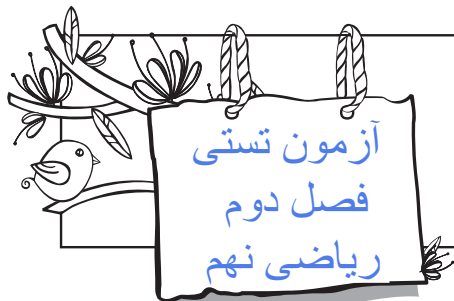
۹	چند تا از جمله‌های زیر درست است؟ (نمونه دولتی یزد ۹۶ - ۹۵) هر عدد اعشاری غیر مختوم، یک عدد گنگ است. عددی وجود دارد که صحیح باشد ولی گویا نباشد. حاصل جمع دو عدد گنگ، همواره یک عدد گنگ است. مساحت مستطیلی به ابعاد $\sqrt{x}$ و $\sqrt{y}$ همواره عددی اصم است.	سه تا (۱)	دو تا (۲)	یکی (۳)	هیچکدام (۴)
---	---	-----------	-----------	---------	-------------

۱۰	اگر $D = \{x \in \mathbb{R} -3 \leq x < 9\}$ باشد، کدام گزینه درست است؟ (نمونه دولتی اصفهان، کهگیلویه و بویراحمد، ۹۶ - ۹۵) (۱) عددی که هم گویا و هم گنگ باشد در D قرار دارد. (۲) عدد $-3 + \sqrt[3]{-27}$ به مجموعه D تعلق دارد. (۳) مجموعه‌ی D با مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{Z} -3 \leq x < 9\}$ مساوی است. (۴) $(\sqrt{19} + \frac{11}{3}) \in D$	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
----	--	-----	-----	-----	-----

۱۱	در شکل زیر به مرکز A و شعاع AC یک کمان زده‌ایم تا محور Ox را در نقطه‌ی B قطع کند. عددی که نقطه‌ی B نمایش می‌دهد عضو کدام یک از مجموعه‌های زیر است؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی استان البرز، ۹۳ - ۹۲)	$\{x \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\}$ (۱)	$\{x \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{3}\}$ (۲)	$\{x \frac{1}{5} < x \leq \frac{1}{2}\}$ (۳)	$\{x \frac{1}{5} < x \leq \frac{1}{3}\}$ (۴)
----	--	---	--	--	--

۱۲	چند تا از جملات زیر همواره صحیح می‌باشند؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی - چهارمحال و بختیاری ۹۳ - ۹۲) (۱) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. (۲) هر عدد حقیقی، عددی گویا است. (۳) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. (۴) بین دو کسر $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.	۴ (۱)	۳ (۲)	۲ (۳)	۱ (۴)
----	---	-------	-------	-------	-------

۱۳	اگر a اصم و b عددی گویا باشد، کدام گزینه ممکن است گنگ نباشد؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی - قم ۹۳ - ۹۲)	$\frac{1}{a}$ (۱)	$a - b$ (۲)	ab (۳)	$a + b$ (۴)
----	--	-------------------	-------------	----------	-------------



	۱۴	باتوجه به شکل، اندازه‌ی CD کدام گزینه است؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی - کردستان ۹۳ - ۹۲)
$\sqrt{3}$ (۲) $3 + \sqrt{3}$ (۳) $3 - \sqrt{3}$ (۴)		
در عدد اعشاری متناوب ۰.۱۲۳۴۵۱۲۳۴۵۰۰۰ هزار و نهصد و نود و دومین رقم پس از ممیز کدام است؟ (مسابقات ریاضی مدارس انگلستان)	۱۵	
۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)		
اگر $x < 0$ آنگاه حاصل $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{4x^2}$ کدام است؟ (نمونه دولتی مازندران ۹۶ - ۹۵)	۱۶	
$x + 1$ (۱) $x - 1$ (۲) $-x - 1$ (۳) $-x + 1$ (۴)		
اگر $x^2 < x$ و $\sqrt{y^2} = -y$ باشد، در این صورت کدام یک همواره درست است؟	۱۷	
$\frac{1}{x} < 1$ (۱) $xy > 0$ (۲) $xy \leq y$ (۳) $xy < 0$ (۴)		
اگر برای دو عدد دلخواه x و y بدانیم $ x + y = 5$ ، آنگاه بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار $ x + y $ به ترتیب کدام است؟	۱۸	
۵ - صفر (۱) صفر - ۵ (۲) ۵ - ۱ (۳) ۱ - ۵ (۴) نمی‌توان مشخص کرد.		
حاصل A کدام است؟	۱۹	
$A = 2 + \frac{3}{2 + \frac{3}{2 + \frac{3}{2 + \dots}}}$		
۳ (۱) -۱ (۲) +۱ (۳) گزینه الف و ب (۴)		
اگر $A = \{a, \overline{aa}, \overline{aaa}, \overline{aaaa}, \dots\}$ به نحوی که در آن $\{a \in N a < 10\}$ باشد، مجموعه A با همین فرض $\{a \in N a < 10\}$ کدام است؟ دقت کنید $\overline{aa}$ عددی دو رقمی است که دهگان و یگان آن عدد a است، $\overline{aaa}$ عددی سه رقمی با ارقام a است و الی آخر.	۲۰	
$\{a(10^n - 1) n \in N\}$ (۱) $\{a(10^n + 1) n \in N\}$ (۲) $\{a(\frac{10^n - 1}{9}) n \in N\}$ (۳) $\{a(\frac{10^n + 1}{9}) n \in N\}$ (۴)		
اگر a عددی طبیعی و یک رقمی باشد، حاصل $A = \frac{0.\overline{a} - 0.0\overline{a}}{0.0\overline{a}}$ کدام است؟	۲۱	
۱۰ (۱) ۹ (۲) ۰٫۱ (۳) ۰٫۹ (۴)		

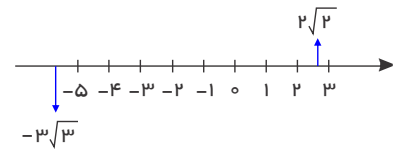


پاسخنامه تشریحی

	گزینه ۱) برای مقایسه راحت تر اعداد توان دار، سعی می کنیم آنها را با پایه های برابر یا توان های برابر در نظر بگیریم: $27^{15} = (3^3)^{15} = 3^{45}$ $32^8 = (2^5)^8 = 2^{40}$ ۱ حال چهار عدد 2^{40}, 2^{35}, 3^{45}, 3^{25} $2^{35} < 2^{40} \text{ و } 3^{25} < 3^{45}$ حال کفایت دو عدد 2^{40} و 3^{45} را مقایسه کنیم که در واقع $2^{40} = (2^8)^5 < 3^{45} = (3^9)^5$
	گزینه ۱) به بررسی عبارت ها می پردازیم: الف) هر کدام از اعداد گویا را به صورت تکی می توان روی محور اعداد نمایش داد، مانند نمایش کسرها روی محور اعداد، ولی اعداد گویا را به صورت یک بازه نمی تواند روی محور اعداد نمایش داد، چون در بین آنها اعداد گنگ نیز وجود دارند. پس این عبارت از یک نظر می تواند درست و از نظر دیگر می تواند نادرست باشد. اما چون اعداد گویا بی شمارند و نمی توان همه را روی محور نشان داد پس نادرست است. ب) درست است. ج) نادرست است، عبارت $a + a > 0$ به ازای اعداد نامثبت درست نیست. د) نادرست است. عبارت $a + b = a + b$ زمانی درست است که a و b هر دو هم علامت باشند.
	گزینه ۱) حاصل جمع عددی گنگ با عددی گویا، همواره عددی گنگ است: $a + b \in Q'$ بررسی سایر گزینه ها: گزینه ۲: مثال نقض $a = \sqrt{2}$ و $b = 0$: آنگاه: $\frac{0}{\sqrt{2}} \notin Q'$ گزینه ۳: مثال نقض $a = \sqrt{2}$ و $b = 0$: آنگاه: $0^2 \times \sqrt{2} \notin Q'$ گزینه ۴: $a = \sqrt{2}$ و $b = 0$: آنگاه: $0 \times \sqrt{2}^2 \notin Q'$
	گزینه ۲) مخرج عبارت $\frac{a-7}{3 a +4}$ همواره مثبت است، پس برای اینکه این عبارت همواره مثبت باشد، کافی است صورت آن مثبت باشد. یعنی: $a - 7 > 0 \Rightarrow a > 7$ مجموعه جواب نامعادله بالا $A = \{a \in \mathbb{R} a > 7\}$
	گزینه ۲) ابتدا محل تقریبی قرار گرفتن دو عدد $2\sqrt{2}$ و $-3\sqrt{3}$ را مشخص می کنیم.

$$2\sqrt{2} \simeq 2 \times 1,4 = 2,8$$

$$-3\sqrt{3} \simeq 3 \times (-1,7) = -5,1$$



بررسی جمله‌ها:

(الف) نادرست است. چون نقاط رنگ شده تشکیل یک پاره‌خط نمی‌دهند، چون اعداد گویا مابین آن‌ها رنگ نشده است.

(ب) درست است. تعداد اعداد گنگ بین $2\sqrt{2}$ و $-3\sqrt{3}$ بی‌شمار است.

(ج) درست است. تعداد اعداد گویا بین دو عدد متمایز بی‌شمار است.

(د) نادرست است. چون اعداد اعشاری نامختوم جزء اعداد گویا هستند و دارای بی‌شمار رقم اعشاری هستند ولی گنگ نیستند.

گزینه ۲: اعداد مرکب را از بین اعداد طبیعی انتخاب می‌کنیم و اعداد طبیعی هم زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی هستند. بررسی سایر گزینه‌ها: در گزینه ی «۱» صفر حکم را نقض می‌کند. در گزینه ی «۳» اعداد $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ هر دو گنگ هستند. اما مجموعه‌شان گویاست ($-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$) در گزینه ی «۴» هم $1 + 2 = 3$ که اول است و حکم را نقض می‌کند. توجه: به زبان ساده نقض کردن یک حکم یعنی نادرستی یک عبارت کلی را (با یک مثال) نشان دادن.

گزینه ۱: کسرها را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{7}{3 \times 4} + \frac{9}{4 \times 5} - \frac{11}{5 \times 6} + \frac{13}{6 \times 7} - \frac{15}{7 \times 8} = \frac{3+2}{2 \times 3} - \frac{4+3}{3 \times 4} + \frac{5+4}{4 \times 5} - \frac{6+5}{5 \times 6} + \frac{7+6}{6 \times 7} - \frac{8+7}{7 \times 8}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

گزینه ۱:

$$x = 5,005$$

$$1000x = 5005,005$$

$$1000x - x = 5005,005 - 5,005$$

$$999x = 5000 \Rightarrow x = \frac{5000}{999}$$

گزینه ۴: چون اعداد اعشاری متناوب ساده مرکب را می‌توان به صورت عدد گویا نوشت، پس عبارت اول غلط است. عبارت دوم به دلیل اینکه تمام اعداد صحیح حتماً گویا هستند غلط است. برای عبارت سوم می‌توان این مثال نقض را آورد که جمع آن‌ها یک عدد گویاست: $(1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3}) = 2$. برای عبارت آخر نیز اگر $x = 8$ و $y = 2$ فرض شود ضرب آن‌ها عددی گویا می‌شود نه گنگ.

$$\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$$

گزینه ۴) باتوجه به اینکه عددی نداریم که هم گویا باشد هم گنگ پس گزینه ی ۱ غلط است.
 حاصل $\sqrt[3]{-27} + 3 = -3 + 3 = 0$ برابر با -6 است که عضو مجموعه ی D نیست.
 مجموعه ی گزینه ی ۳ با D برابر نیست؛ چون تعداد اعضای D بی نهایت است ($x \in R$) اما این مجموعه کراندار است و تعداد مشخصی دارد ($x \in Z$).
 پس گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است؛ چون مقدار تقریبی $\sqrt{19} + \frac{11}{3}$ برابر با $7,6$ است که عضو مجموعه ی D می باشد.

گزینه ۲) ابتدا بنا بر قضیه فیثاغورس اندازه OA را به دست می آوریم
 $OA^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow OA^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow OA^2 = 8 \Rightarrow OA = \sqrt{8}$
 پس مقدار AC را بنا بر قضیه فیثاغورس به دست می آوریم
 $AC^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow AC^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow AC^2 = 8 \Rightarrow AC = \sqrt{8}$
 و چون AB و AC هر دو شعاع کمان دایره هستند پس با هم برابرند پس:
 $OA = \sqrt{8}$, $AB = \sqrt{8} \Rightarrow OB = \sqrt{8} + \sqrt{8} = 2\sqrt{8}$
 از طرفی $2\sqrt{8} = 2\sqrt{4 \times 2} = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \simeq 4 \times 1,4 = 5,6$
 باتوجه به گزینه ها مشخص می شود که نقطه B عضو مجموعه ۲ می باشد.

گزینه ۴)
 گزینه ی ۱ : $(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2 \in Q$
 گزینه ی ۳ : $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1 \in Q$
 گزینه ی ۲ : $Q \subset R$ (اعداد گویا زیرمجموعه، اعداد حقیقی هستند)

گزینه ۳) اگر a را برابر $\sqrt{2}$ و b را صفر قرار دهیم، داریم: $ab = \sqrt{2} \times 0 = 0$ که عددی گنگ نیست.

گزینه ۴)
 $OC^2 = OB^2 - BC^2 \rightarrow OC^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \rightarrow OC = \sqrt{3}$
 $OA^2 = AB^2 + OB^2 \rightarrow OA^2 = 2^2 + \sqrt{5}^2 = 4 + 5 = 9 \rightarrow OA = \sqrt{9} = 3 \rightarrow OA = OD = 3$
 $CD = OD - OC = 3 - \sqrt{3}$

گزینه ۲) دوره ی گردش این کسر ۵ تایی است لذا عدد ۱۹۹۲ را بر ۵ تقسیم می کنیم. برحسب باقی مانده این تقسیم ۱۳۹۲ این رقم پس از ممیز برابر عدد ۲ است.



$$\begin{array}{r}
 5 \\
 1992 \overline{) 398} \\
 \underline{15} \\
 49 \\
 \underline{45} \\
 42 \\
 \underline{40} \\
 2
 \end{array}$$

گزینه ۴ چون x عددی منفی است پس:

$$\sqrt{x^2 + 1 + \underbrace{|2x|}_{\text{منفی}}} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = -x+1$$

۱۶

گزینه ۴ می دانیم هرگاه عددی از مجذورش بزرگتر باشد مثبت و کوچکتر از یک است.

طبق فرض دوم سؤال y عددی منفی است (چون $y^2 = |y| = -y$) پس حاصلضرب x در y عددی منفی است.

۱۷

گزینه ۱ نکته:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

با کمک نکته بالا داریم:

$$\begin{cases} |x+y| \leq |x| + |y| \\ |x| + |y| = 5 \end{cases} \Rightarrow |x+y| \leq 5$$

۱۸

بنابراین بیشترین مقدار $|x+y|$ مقدار ۵ خواهد بود. برای مثال $x = 2.5$ یا $y = x = 2.5$ یا $y = 5$, $x = 0$ در نظر می گیریم. از طرفی می دانیم حاصل قدر مطلق همواره عددی بزرگتر یا مساوی صفر است. اگر بخواهیم کمترین مقدار مورد نظر یعنی صفر را داشته باشیم باید x و y دو عدد قرینه باشند، یعنی اگر $x = 2.5$ و $y = -2.5$ یا $x = -2.5$ و $y = 2.5$ باشد، آنگاه $|x+y| = 0$ خواهد بود.

گزینه ۱ اگر دقت کنید خود A در A وجود دارد پس داریم:

$$A = 2 + \frac{3}{2 + \frac{3}{2 + \frac{3}{2 + \dots}}} \rightarrow A = 2 + \frac{3}{A} \rightarrow$$

۱۹

حال معادله فوق را حل می کنیم یا گزینه ها را امتحان می کنیم:

$$A^2 = 2A + 3 \rightarrow A^2 - 2A - 3 = 0 \rightarrow (A-3)(A+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} A = 3 \checkmark \\ A = -1 \times \end{cases}$$

جواب ۱ - غیر قابل قبول است زیرا سمت راست تساوی مثبت است پس سمت چپ نمی تواند منفی باشد.

گزینه ۳ با جایگذاری اعداد طبیعی به جای متغیر n ، هر کدام از گزینه ها را بررسی می کنیم:

گزینه ۱ «۱»:

۲۰

$$9, 99, 999, 9999, \dots \Rightarrow A = \{9a, 99a, 999a, \dots\}$$

گزینۀ «۲»:

$$11, 101, 1001, 10001, \dots \Rightarrow A = \{\overline{aa}, \overline{a0a}, \overline{a00a}, \dots\}$$

گزینۀ «۳»:

$$1, 11, 111, 1111, \dots \Rightarrow A = \{a, \overline{aa}, \overline{aaa}, \overline{aaaa}, \dots\}$$

گزینۀ «۴»:

$$\frac{11}{9}, \frac{101}{9}, \frac{1001}{9}, \frac{10001}{9}, \dots \Rightarrow A = \{\frac{\overline{aa}}{9}, \frac{\overline{a0a}}{9}, \frac{\overline{a00a}}{9}, \dots\}$$

گزینۀ «۱» ابتدا صورت کسر A را ساده می‌کنیم:

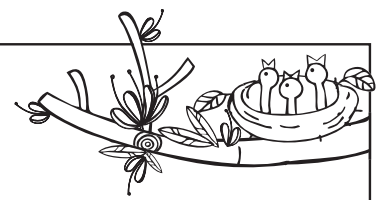
$$\begin{array}{r} 0,aaa\dots \\ - 0,0aa\dots \\ \hline 0,a00\dots \end{array}$$

۲۱ حالا کسر A را تشکیل می‌دهیم:

$$A = \frac{0,a}{0,0a} = \frac{\frac{a}{10}}{\frac{a}{100}} = \frac{100a}{10a} = 10$$

پاسخنامه کلیدی

۱ ☆	۱	۶ ☆	۲	۱۱ ☆	۲	۱۶ ☆	۴	۲۱ ☆	۱
۲ ☆	۱	۷ ☆	۱	۱۲ ☆	۴	۱۷ ☆	۴		
۳ ☆	۱	۸ ☆	۱	۱۳ ☆	۳	۱۸ ☆	۱		
۴ ☆	۲	۹ ☆	۴	۱۴ ☆	۴	۱۹ ☆	۱		
۵ ☆	۲	۱۰ ☆	۴	۱۵ ☆	۲	۲۰ ☆	۳		



عکسی به ابعاد ۴ و ۶ سانتی متر را بزرگ کرده ایم. (بدون اینکه نسبت تشابه به هم بخورد) اگر به عرض عکس ۱۲ سانتی متر اضافه شده باشد به طول آن چند سانتی متر اضافه شده است؟ (نمونه دولتی آذربایجان شرقی ۹۶ - ۹۵)	۱
☐ ۱۲ ☐ ۱۶ ☐ ۱۸ ☐ ۲۴	

کدام یک از استدلال‌های زیر درست است؟	
☐ ۱ در هر دوزنقه‌ای همواره دو ضلع موازی داریم. پس هر شکلی که دو ضلع موازی داشته باشد، نوعی دوزنقه است.	
☐ ۲ در هر دایره بی‌شمار وتر هم‌اندازه می‌توان رسم کرد. پس تمام وترهای یک دایره با هم برابرند.	۲
☐ ۳ می‌دانیم مربع نوعی لوزی است. پس هر چهارضلعی که زاویه‌هایش قائمه باشند، حتماً لوزی است.	
☐ ۴ قطرهای متوازی‌الاضلاع همدیگر را نصف می‌کنند. مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است. پس قطرهایش منصف یکدیگرند.	

کدام گزینه درست است؟	
☐ ۱ دو مثلث متساوی‌الساقین که یک میانه برابر دارند، هم‌نهشت هستند.	
☐ ۲ دو مثلث قائم‌الزاویه که دو ضلع برابر دارند، هم‌نهشت هستند.	۳
☐ ۳ دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت هستند.	
☐ ۴ دو مثلث متساوی‌الاضلاع که یک ارتفاع برابر دارند، هم‌نهشت هستند.	

سه مثلث روبه‌رو به فاطمه داده شده تا میانه‌های آن‌ها را رسم کند و سپس در مورد میانه‌های هر مثلث دلخواه استدلالی بیان کند، کدام استدلال او قابل قبول است؟	
☐ ۱	
چون در این سه مثلث محل برخورد میانه‌ها در داخل مثلث است، پس می‌توان نتیجه گرفت در تمام مثلث‌ها محل برخورد میانه‌ها داخل مثلث است.	
☐ ۲ چون محل برخورد میانه‌ها در یکی از مثلث‌ها در خارج مثلث است، پس نمی‌توان گفت محل برخورد میانه‌های هر مثلثی داخل آن است.	۴
☐ ۳ چون می‌توان مثلثی به جز این سه مثلث پیدا کرد که محل برخورد میانه‌های آن، خارج از مثلث باشد، پس نمی‌توان گفت محل برخورد میانه‌های هر مثلثی داخل آن است.	
☐ ۴ چون در هر مثلث دلخواهی از جمله این سه مثلث، محل برخورد میانه‌ها داخل مثلث است، پس می‌توان گفت محل برخورد میانه‌ها در تمامی مثلث‌ها داخل آن‌ها است.	





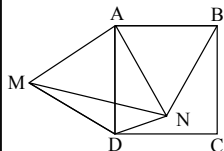
	دو مستطیل $ABCD$ و $BCEF$ با یکدیگر مشابه‌اند. نسبت مساحت $ADEF$ به $BCEF$ برابر است با: $\frac{10}{9}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{8}{7}$ (۱) $\frac{4}{3}$ (۳)	۵
در دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین $ABCD$ با قاعده‌های $AB = 6$ و $CD = 8$ مطابق شکل از نقطه‌ی P وسط AB، دو خط موازی دو ساق رسم کرده‌ایم. نسبت $\frac{PM}{NR}$ چقدر است؟ (انرژی اتمی ۹۱ - ۹۰)	$\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{5}{6}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۳)	۶
اگر یک پرتوی نور از نقطه‌ی S تابیده شود به طوری که پس از برخورد و انعکاس با آئینه در نقطه‌ی P، به نقطه‌ی T برسد، به طوری که PT عمود بر RS باشد، باتوجه به شکل x برابر است با: (المپیاد آفریقای جنوبی - ۱۳۷۶)	32 (۲) 38 (۴) 26 (۱) 37 (۳)	۷
	در شکل زیر محیط شش ضلعی منتظم ۳۶ است. هر رأس مرکز یک دایره و شعاع هر یک از دایره‌ها نصف طول شش ضلعی است. محیط شکل هاشورخورده کدام است؟ 6π (۴) 13π (۳) 12π (۲) 15π (۱)	۸
مستطیل $ABCD$ از روی خط CP طوری تا شده که نقطه‌ی D روی AB می‌افتد و نقطه‌ی D' را به وجود می‌آورد. اگر $BC = 6\text{cm}$ و $CD = 10\text{cm}$ باشد، طول DP را به دست آورید. (المپیاد آفریقای جنوبی - ۱۳۹۱)	3 (۲) $\sqrt{13}$ (۴) $\frac{10}{3}$ (۱) $\frac{8}{3}$ (۳)	۹
در شکل مقابل طول‌های SP، SQ و SR با هم برابرند و اندازه‌ی زاویه‌ی $\angle SRQ$ مساوی x° درجه است. اندازه‌ی زاویه‌ی $\angle PQR$ برحسب واحد درجه چه قدر است؟ (مسابقات ریاضی انگلستان - ۱۳۶۸)	$2x$ (۲) $180 - 2x$ (۴) 90 (۱) $3x$ (۳)	۱۰



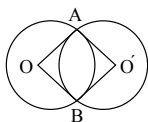


پاره خط AK نیمساز زاویه A در مثلث ABC است. AK مثلث ABC را به دو مثلث با مساحت های یکسان تقسیم می کند. مثلث ABC لزوماً مثلثی است: (کانگورو - ۱۳۸۵)	۱۱
☐ ۱ متساوی الاضلاع ☐ ۲ متساوی الساقین ☐ ۳ قائم الزویه ☐ ۴ حاده	

چهارضلعی $ABCD$ مربع و مثلث های AMD و ANB متساوی الاضلاع اند. اندازه زاویه MND را به دست آورید.	۱۲
☐ ۱ 30° ☐ ۲ 45° ☐ ۳ 15° ☐ ۴ 75°	

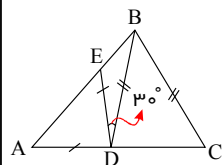


در شکل زیر دو دایره به مرکزهای O و O' یکدیگر را در نقاط A و B قطع می کنند. در این صورت چند تا از گزینه های زیر، درست است؟	۱۳
(a) چهارضلعی $OAO'B$ لوزی است. (b) خط OO' عمود منصف پاره خط AB است. (c) OO' نیمساز زاویه های O و O' است. (d) AB نیمساز زاویه های A و B است.	
☐ ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴	

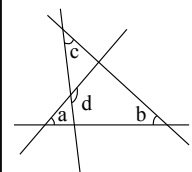


در مثلث متساوی الاضلاع ABC ، نیمساز AH را رسم می کنیم. از H میانه HM وارد بر AC را در مثلث AHC رسم می کنیم. چه تعداد از موارد زیر درست است؟	۱۴
الف) مثلث HMC متساوی الاضلاع است. ب) مثلث HMA متساوی الساقین است. ج) مثلث ABC با نسبت تشابه ۲ با مثلث HMC متشابه است.	
☐ ۱ صفر ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴	

در شکل مقابل $BC = BD$ و $AB = AC$ و $DE = AD$. اگر $\widehat{EDB} = 30^\circ$ باشد، آن گاه $\widehat{BAC}$ برابر است با: (المپیاد آفریقای جنوبی - ۱۳۹۰)	۱۵
☐ ۱ 32° ☐ ۲ 24° ☐ ۳ 40° ☐ ۴ 48°	



در شکل، $a = 55^\circ$ ، $b = 40^\circ$ و $c = 35^\circ$. مقدار d کدام است؟ (کانگورو - ۱۳۹۱)	۱۶
☐ ۱ 105° ☐ ۲ 120° ☐ ۳ 125° ☐ ۴ 130°	





در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، $AB = AC$ ، $\angle BAD = 80^\circ$ ، $\angle ABC = 75^\circ$ و $\angle ADC = 65^\circ$ اندازه‌ی زاویه‌ی BDC کدام است؟ (کانگورو - ۱۳۸۹)

۱۷

۱) 10° ۲) 15° ۳) 20° ۴) 30°

در شکل زیر یک ۹ ضلعی منتظم نمایش داده شده است. اندازه‌ی زاویه‌ی α چه قدر است؟ (کانگورو - ۱۳۸۷)

۱۸

۱) 45° ۲) 50° ۳) 55° ۴) 60°

در شکل زیر نقاط S ، R و Q روی یک خط قرار گرفته‌اند، $\angle QPS = 12^\circ$ و $PQ = PS = RS$ اندازه‌ی زاویه‌ی QPR برابر است با: (کانگورو - ۱۳۸۷)

۱۹

۱) 36° ۲) 42° ۳) 54° ۴) 60°

مثلث متساوی‌الساقین ABC (که در آن $BC = AC$) و نقطه‌ی D روی AB داده شده است و $AD = AC$ و $DB = DC$ اندازه‌ی زاویه‌ی ACB چند است؟ (کانگورو - ۱۳۸۶)

۲۰

۱) 98° ۲) 100° ۳) 104° ۴) 108°

چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است که ضلع DC به وسیله‌ی نقطه‌ی E نصف شده است. اگر $GE \parallel BC$ باشد، مساحت بخش رنگی چه کسری از مساحت مستطیل است؟ (المپیاد آفریقای جنوبی - ۱۳۸۵)

۲۱

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{2}{7}$

با رسم دو خط موازی به فاصله‌ی یک سانتی متر از هم، مربع مقابل به سه قسمت با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌شود. مساحت مربع کدام است؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی - آذربایجان غربی، شرقی، اردبیل و زنجان ۹۳ - ۹۲)

۲۲

۱) 12 ۲) 13 ۳) 14 ۴) 15



دو دایره‌ی زیر در نقطه‌ی D مماس هستند. و دایره‌ی کوچکتر از مرکز دایره بزرگ می‌گذرد. نسبت $\frac{DE}{DA}$ چقدر است؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی - تهران ۹۳ - ۹۲)

۲۳

۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{1}{5}$

در شکل، مثلثی با سه پاره‌خط به چهار مثلث و سه چهارضلعی تقسیم شده است. مجموع محیط‌های سه چهارضلعی ۲۵ سانتی‌متر است، مجموع محیط‌های چهار مثلث ۲۰ سانتی‌متر است و محیط مثلث بزرگ ۱۹ سانتی‌متر است. مجموع طول‌های سه پاره‌خط کدام است؟ (کانگورو - ۱۳۹۱)

۲۴

۱ ۱۱ ۲ ۱۲ ۳ ۱۳ ۴ ۱۵

در شکل دو دایره‌ی S_1 و S_2 را نشان داده‌ایم که شعاع‌هایشان متفاوت است و بر هم و بر خط L مماس‌اند. کدام حکم درست است؟ (کانگورو - ۱۳۸۰)

۲۵

۱ هیچ دایره‌ای نمی‌تواند بر S_1 و S_2 و L مماس باشد.
 ۲ دقیقاً یک دایره هست که بر S_1 و S_2 و L مماس است.
 ۳ دقیقاً دو دایره هستند که بر S_1 و S_2 و L مماس‌اند.
 ۴ دقیقاً چهار دایره هستند که بر S_1 و S_2 و L مماس‌اند.

مثلث ABC متساوی‌الساقین است، $|AC'| = |BC'|$ و $\angle ACB = ۳۶^\circ$. مثلث‌های BDA و EBD هم مثلث‌های متساوی‌الساقین‌اند و $|AB| = |AD|$ و $|DE| = |DB|$ اندازه‌ی $\angle DEB$ چند است؟ (کانگورو - ۱۳۸۱)

۲۶

۱ ۹۰° ۲ ۳۶° ۳ ۵۴° ۴ ۷۲°

مربعی به ۲۵ مربع کوچک یکسان تقسیم شده است. مجموع اندازه‌های زاویه‌های $\angle MAN$ و $\angle MBN$ و $\angle MCN$ و $\angle MDN$ و $\angle MEN$ چند است؟ (کانگورو - ۱۳۸۲)

۲۷

۱ ۳۰° ۲ ۴۵° ۳ ۶۰° ۴ ۷۵°





تعدادی مثلث متساوی الاضلاع کوچک، برای ساختن یک مثلث متساوی الاضلاع بزرگ در کنار هم مطابق شکل روبه‌رو قرار گرفته‌اند، در حالی که بخشی از شکل توسط یک ورقه‌ی کاغذ پوشانده شده است. تعداد مثلث‌های کوچک به کار گرفته چند تا است؟ (مسابقات ریاضی انگلستان - ۱۳۶۸)

۲۸

۱۲ (۱)
۱۵ (۳)
۱۳ (۲)
۲۵ (۴)

در شکل زیر یک مثلث متساوی الاضلاع و یک پنج ضلعی منتظم نشان داده شده است. اندازه‌ی زاویه‌ی x چند است؟ (کانگورو - ۱۳۸۳)

۲۹

۱۲۴° (۱)
۱۳۲° (۳)
۱۲۸° (۲)
۱۴۰° (۴)

مثلث‌های ABC و CDE متساوی الاضلاع و هم‌نهشت‌اند. اگر $\angle ACD = ۸۰^\circ$ ، اندازه‌ی $\angle ABD$ چند است؟ (المپیاد کانگورو - ۱۳۸۵)

۳۰

۲۵° (۱)
۳۵° (۳)
۳۰° (۲)
۴۰° (۴)

در چهارضلعی $PQRS$ می‌دانیم $PQ = ۲۰۰۶$ ، $QR = ۲۰۰۸$ ، $RS = ۲۰۰۷$ و $SP = ۲۰۰۹$. زاویه داخلی کدام رأس‌ها حتماً کوچکتر از ۱۸۰° است؟ (کانگورو - ۱۳۸۷)

۳۱

P, R, S (۴)
 P, Q, S (۳)
 Q, R, S (۲)
 R, Q, P (۱)

در ستاره‌ی مقابل حاصل $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F} + \widehat{G}$ برابر است با: (المپیاد آفریقای جنوبی - ۱۳۷۷)

۳۲

۵۴۰° (۱)
۷۲۰° (۲)
۳۶۰° (۳)
۹۰۰° (۴)

در نیم‌دایره‌ی زیر CD بر قطر AB عمود است. اگر $AD = \sqrt{۳}$ و $AB = ۴\sqrt{۳}$ باشند، اندازه‌ی کمان BC چند درجه است؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی - خوزستان ۹۲-۹۳)

۳۳

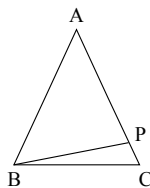
۱۱۰ (۱)
۱۴۰ (۳)
۱۲۰ (۲)
۱۵۰ (۴)



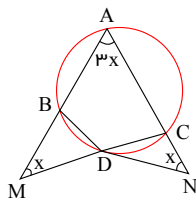


۳۴	کدام گزاره درباره‌ی قطرهای چندضلعی‌های محدب درست است؟ (کانگورو - ۱۳۷۷)
۱	اگر تعداد قطرهای فرد باشد تعداد ضلع‌ها هم فرد است.
۲	تعداد قطرهای همیشه بیشتر از تعداد ضلع‌ها است.
۳	چندضلعی محدبی وجود دارد که ۳۵ قطر دارد.
۴	چندضلعی محدبی وجود دارد که ۲۸ قطر دارد.

۳۵	در شکل، مثلث ABC متساوی‌الساقین است. $AB = AC$ ، $\angle BPC = ۱۲۰^\circ$ و $\angle ABP = ۵۰^\circ$ اندازه‌ی زاویه‌ی PBC کدام است؟
۱	۵°
۲	۱۰°
۳	۱۵°
۴	۲۰°

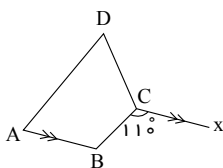


۳۶	در شکل مقابل $\hat{x}$ چند درجه است؟ (نمونه دولتی آذربایجان غربی ۹۵-۹۶)
۱	$۲۲,۵$
۲	۲۵
۳	$۲۷,۵$
۴	۴۰

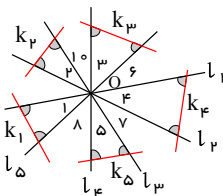


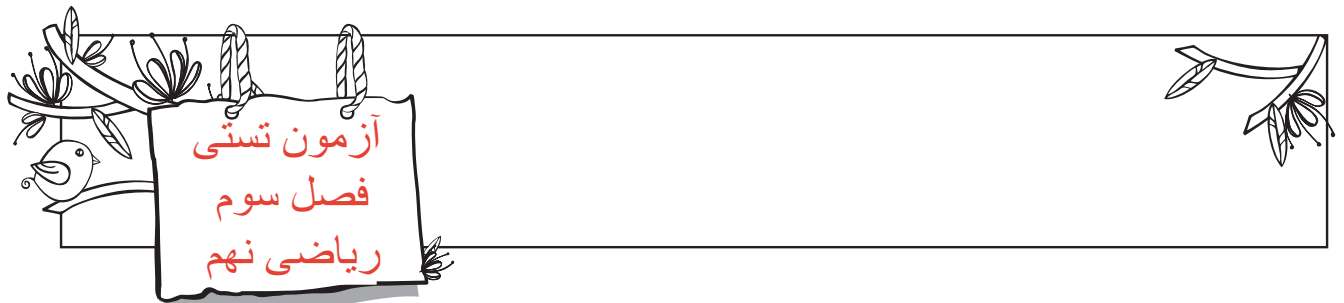
۳۷	زاویه‌ی بین دو محور تقارن متوالی از یک چندضلعی منتظم کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟
۱	$\sqrt{۳۶۰}^\circ$
۲	۳۱°
۳	$\frac{1}{5}^\circ$
۴	۷°

۳۸	چهارضلعی $ABCD$ دوزنقه متساوی‌الساقین است. اندازه‌ی زاویه‌ی D کدام است؟ (نمونه دولتی گلستان ۹۵-۹۶)
۱	۷۰
۲	۶۰
۳	۵۰
۴	۸۰



۳۹	پنج خط l_1, l_2, l_3, l_4 و l_5 را در نقطه‌ی O هم‌رس‌اند. خط‌های k_1, k_2, k_3, k_4 و k_5 مطابق شکل صفحه‌ی بعد قطع کنند. حاصل جمع اندازه‌ی زاویه‌های سایه خورده کدام است؟ (کانگورو - ۱۳۸۴)
۱	۳۰۰
۲	۴۵۰
۳	۷۲۰
۴	۶۰۰





در دوزنقه‌ی $PQRS$ ضلع‌های PQ و RS موازی هستند. اندازه‌ی زاویه‌ی RSP برابر 120° است و $RS = SP = \frac{1}{3}PQ$. اندازه‌ی زاویه‌ی PQR چه قدر است؟	(کانگورو - ۱۳۹۳)	۴۰	۱۵° (۱) ۲۲,۵° (۲) ۲۵° (۳) ۳۰° (۴)
--	-------------------------	-----------	---

@riazicafe



پاسخنامه تشریحی

گزینه ۳

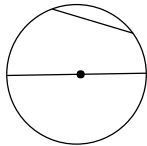
$$\frac{4}{6} = \frac{4+12}{6+x} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{16}{6+x} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} 4(6+x) = 6 \times 16$$

$$\Rightarrow 24 + 4x = 96 \Rightarrow 4x = 96 - 24 \rightarrow 4x = 72 \\ x = 18$$

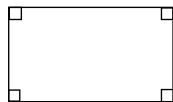
گزینه ۴ بررسی سایر گزینه‌ها:



گزینه ۱: نادرست است. مثال نقض: متوازی‌الاضلاع هم دو ضلع موازی دارد ولی نوعی دوزنقه نیست.



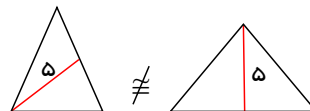
گزینه ۱: نادرست است. مثال نقض: متوازی‌الاضلاع هم دو ضلع موازی دارد ولی نوعی دوزنقه نیست.



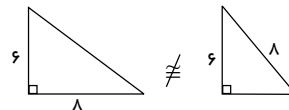
گزینه ۱: نادرست است. مثال نقض: متوازی‌الاضلاع هم دو ضلع موازی دارد ولی نوعی دوزنقه نیست.

گزینه ۴ این گزینه: پاسخ درست است. چون مثلث متساوی‌الاضلاع سه ضلعی منتظم است و تمام ارتفاع‌های آن برابر است، در صورت داشتن ارتفاع برابر، یعنی هر سه ارتفاع آنها با هم برابر است و در نتیجه دو شکل با هم، هم‌نهشت هستند. بررسی سایر گزینه‌ها: برای گزینه‌های ۱ تا ۳ مثال نقض می‌آوریم.

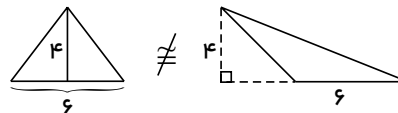
گزینه ۱:



گزینه ۲:



گزینه ۳:



گزینه ۴ نکته: به پاره‌خطی که رأس مثلث را به وسط ضلع مقابلش وصل می‌کند می‌گویند.

به میانه‌های رسم شده در ۳ مثلث داده شده دقت کنید:



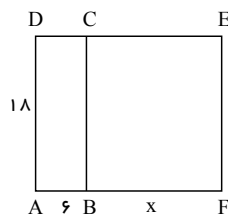
محل برخورد میانه‌ها در این سه مثلث داخل آن‌هاست ولی از این موضوع نمی‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد میانه‌ها در تمام مثلث‌ها داخل آن‌هاست، پس گزینه‌های ۱ و ۲ نادرست هستند. از طرفی چون هیچ مثال نقضی نمی‌توان برای این مطلب یافت، پس گزینه ۳ نیز نادرست است. نکته: محل برخورد میانه‌های هر مثلث دلخواهی داخل آن است و به آن مرکز ثقل مثلث می‌گویند.

گزینه ۲ طول مستطیل $BCEF$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{6}{18} = \frac{18}{x} \rightarrow x = \frac{18 \times 18}{6} = 54$$

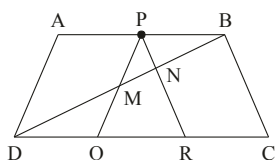
$$\frac{S_{ADEF}}{S_{BCEF}} = \frac{AF \times AD}{BF \times BC} = \frac{(54 + 6) \times 18}{54 \times 18} = \frac{60}{54}$$

$$\rightarrow \frac{S_{ADEF}}{S_{BCEF}} = \frac{10}{9}$$



۵

گزینه ۴



از اینکه P وسط AB و چهارضلعی‌های $APDQ$ و $PRCB$ متوازی‌الاضلاع هستند داریم:
 $AP = PB = DQ = RC = 3$

$$DC = DQ + QR + RC \Rightarrow 8 = 3 + QR + 3 \Rightarrow QR = 2 \text{ همچنین}$$

و همچنین اندازه‌ی $AD = BC = a$ در نظر می‌گیریم.

برای مثلث ABD داریم:

$$\frac{PM}{AD} = \frac{PB}{AB} \Rightarrow \frac{PM}{a} = \frac{3}{6} \Rightarrow 6PM = 3a \Rightarrow PM = \frac{1}{2}a \quad (1)$$

برای مثلث DBC قضیه‌ی تالس را می‌نویسیم:

$$\frac{NR}{BC} = \frac{DR}{DC} \Rightarrow \frac{NR}{a} = \frac{5}{8} \Rightarrow 8NR = 5a \Rightarrow NR = \frac{5}{8}a \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{PM}{NR} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{5}{8}a} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{8}}{5} = \frac{4}{5}$$

۶

گزینه ۲

$$\triangle SYP \Rightarrow \widehat{SPY} = x$$

$$\widehat{PST} = x + x = 2x \text{ زاویه‌ی خارجی}$$

۷

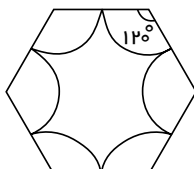
$$\triangle SPT : 2x + 26 + 90 = 180 \Rightarrow x = 32^\circ$$

گزینه ۲ ابتدا اندازه یک زاویه شش ضلعی منتظم را به دست می آوریم.

$$\frac{180^\circ (6 - 2)}{6} = \frac{180^\circ \times 4}{6} = 120^\circ$$

اگر این قطاع های دایره ای را پیش هم بگذاریم:

$$\frac{6 \times 120^\circ}{360^\circ} = 2$$



به اندازه ۲ دایره کامل خواهد بود.

پس کافی است، محیط یک دایره را به دست آورده و در ۲ ضرب کنیم.

$$\text{اندازه ضلع شش ضلعی} = 6 = 36 \div 6$$

$$\text{شعاع دایره} = 3 = 6 \div 2$$

$$\text{محیط دایره} = 2\pi r = 6\pi$$

$$\text{محیط دو دایره} = 12\pi$$

گزینه ۱ چون مستطیل ABCD از روی خط CP تا شده است، در نتیجه دو مثلث DPC و D'PC هم نهشت اند.

$$\triangle BD'C : BD'^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow BD' = 8 \Rightarrow AD' = 10 - 8 = 2$$

$$\triangle AD'P : PD'^2 = (6 - PD)^2 + 2^2 \xrightarrow{PD=PD'} PD^2 = 36 + PD^2 - 12PD + 4$$

$$\Rightarrow 12PD = 40 \Rightarrow PD = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$$

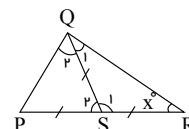
گزینه ۱ مثلث های QPS و QRS متساوی الساقین هستند:

$$R = x^\circ \Rightarrow Q_1 = x^\circ$$

$$S_1 = x + x = 2x$$

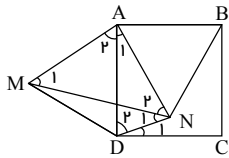
$$Q_2 = \frac{180 - 2x}{2} = 90 - x$$

$$\angle PQR = 90 - x + x = 90^\circ$$



گزینه ۲ بدون داشتن اطلاعاتی در مورد طول ضلع‌ها چون می‌دانیم نیمساز زاویه‌ی A مثلث را به دو مثلث با مساحت‌های یکسان تقسیم می‌کند، پس نیمساز زاویه‌ی A میانه وارد بر ضلع BC هم هست. بنابراین، حتماً مثلث متساوی‌الساقین است. توجه کنید که این مثلث ممکن است متساوی‌الاضلاع هم باشد ولی لازم نیست که این‌طور باشد.

گزینه ۱



برای راحتی زاویه MND را با $\widehat{N}_1$ نشان می‌دهیم:

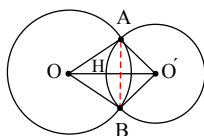
زاویه $\widehat{A}_1$ برابر است با $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (اختلاف زاویه مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع) زاویه $\widehat{A}_2$ برابر است با 60° (زاویه مثلث متساوی‌الاضلاع).

مثلث AMN متساوی‌الساقین است، پس $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_2$ و زاویه رأس آن $(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2) = 90^\circ$ است، پس $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_2 = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$ ، از طرفی مثلث ADN هم متساوی‌الساقین است با زاویه رأس $\widehat{A}_1 = 30^\circ$ و در نتیجه $\widehat{D}_2$ و $\widehat{N}_1 + \widehat{N}_2$ برابر هستند.

$$\widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

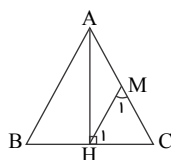
$$\Rightarrow \widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = 75^\circ \xrightarrow{\widehat{N}_2 = 45^\circ} \widehat{N}_1 = 30^\circ$$

گزینه ۲



ممکن است دو دایره شعاع برابر نداشته باشند، چون در صورت سؤال اطلاعی در مورد شعاع دایره داده نشده است. باتوجه به شکل به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم.
(a) نادرست؛ ممکن است شعاع‌ها برابر نباشد.
(b) درست؛ باتوجه به هم‌نهشتی دو مثلث AOH و BHO می‌توان نشان داد که OO' عمود منصف AB است.
(c) درست؛ از هم‌نهشتی دو مثلث AOO' و OBO' ثابت می‌شود.
(d) نادرست؛ در صورت مساوی نبودن شعاع، AB نیمساز $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ نیست.

گزینه ۴



نکته: در مثلث متساوی‌الاضلاع تمامی زوایا 60° است.

نکته: میانه پاره‌خطی است که از رأس یک مثلث به وسط ضلع مقابل رسم می‌شود.

نکته: در مثلث متساوی‌الاضلاع نیمساز هر رأس، میانه و ارتفاع هم می‌باشد.

اگر طول ضلع مثلث ABC را a در نظر بگیریم، طول $MC = HC = \frac{a}{2}$ است. پس $\widehat{H}_1 = \widehat{M}_1$ از طرفی چون $\widehat{C} = 60^\circ$ ، بنابراین

پس مثلث HMC نیز متساوی الاضلاع است و چون طول ضلع آن نصف طول ضلع $\triangle ABC$ می باشد، پس با نسبت ۲ با مثلث ABC متشابه است.

$$\begin{cases} HM = MC = HC \\ AM = MC \end{cases} \Rightarrow HM = MA \Rightarrow HMA \text{ متساوی الساقین است}$$

بنابراین هر ۳ مورد گفته شده درست است.

گزینه ۴

$$AD = DE \Rightarrow \widehat{EAD} = \widehat{DEA} = y$$

$$AB = AC \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = x$$

$$BC = BD \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{DCB} = x$$

$$ADE \text{ مثلث خارجی در زاویه } x + 30^\circ = y + y \Rightarrow x + 30^\circ = 2y \Rightarrow x = 2y - 30^\circ \quad (1)$$

$$\triangle ABC : y + x + x = 180^\circ \Rightarrow y + 2x = 180^\circ \xrightarrow{(1)} y + 2(2y - 30^\circ) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 5y - 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow y = \frac{240^\circ}{5} = 48^\circ$$

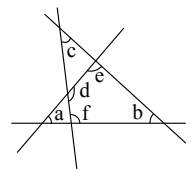
۱۵

گزینه ۴

$$f + b + c = 180^\circ \rightarrow f = 105^\circ$$

$$e + a + b = 180^\circ \rightarrow e = 85^\circ$$

$$e + f + b + d = 360^\circ \rightarrow d = 130^\circ$$



۱۶

گزینه ۲

$$\widehat{B} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{C}_r = 75^\circ$$

$$\Rightarrow A_1 = 30^\circ \Rightarrow \widehat{A}_r = 50^\circ$$

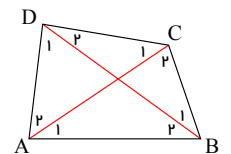
$$\Rightarrow \widehat{C}_1 = 180^\circ - (50^\circ + 65^\circ) = 65^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D} \Rightarrow AC = AD$$

$$\Rightarrow AD = AB$$

$$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{B}_r = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{D}_r = 15^\circ$$



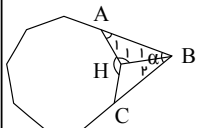
۱۷

مجموع زاویه های خارجی یک n ضلعی 360° است. بنابراین $A_1 = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$ از سوی دیگر اندازه ی هر زاویه ی داخلی ۹

$$\text{ضلعی برابر } \frac{(9-2) \times 180^\circ}{9} = 140^\circ \text{ است.}$$

خط BH نیمساز زاویه ی ABC است و زاویه های $\widehat{B}_1$ و $\widehat{B}_r$ برابرند. از طرف دیگر زاویه ی $\widehat{H}_1$ برابر است با:

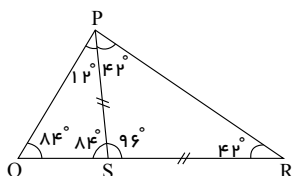
۱۸



در نتیجه، $\frac{360^\circ - 140^\circ}{2} = 110^\circ$ و $\widehat{B}_1 = 180^\circ - 40^\circ - 110^\circ = 30^\circ$ و $\widehat{\alpha} = 2\widehat{B}_1 = 60^\circ$

گزینه ۳ مثلث PQS متساوی الساقین است. بنابراین: $\angle PQS = \angle PSQ = \frac{1}{2}(180^\circ - 12^\circ) = 84^\circ$

بنابراین، $\angle PSR = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$

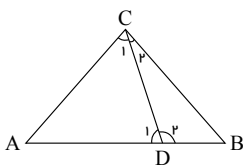


مثلث PSR نیز متساوی الساقین است بنابراین: $\angle SPR = \angle SRP = \frac{1}{2}(180^\circ - 96^\circ) = 42^\circ$

در نتیجه:

$\angle QPR = 12^\circ + 42^\circ = 54^\circ$

گزینه ۴ از متساوی الساقین بودن مثلث های ACD و DBC نتیجه می شود که زاویه های A و B و C مساوی اند، زاویه ی D_1 زاویه ی خارجی مثلث DBC است و در نتیجه $\widehat{D}_1 = \widehat{B} + \widehat{C}$ و چون $\widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$ باید $\widehat{C} = 3\widehat{A}$ به این ترتیب، باید $\widehat{A} = 54^\circ$ که نتیجه می دهد $A = 36^\circ$ و $\widehat{C} = 108^\circ$



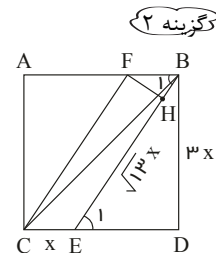
$DE = EC$
ارتفاع دو مثلث EDB , ECB با هم برابر است $\Rightarrow S_{\triangle EDB} = S_{\triangle ECB}$

ضلع مشترک: $GE = GE$
ارتفاع: $DE = EC$ $\Rightarrow S_{\triangle DEG} = S_{\triangle EGB}$

$\frac{S_{\text{هاشور}}}{S_{\text{مستطیل}}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$$S_{BED} = 2S_{BCE} \xrightarrow[\text{را } BD \text{ میگیریم}]{\text{ارتفاع هر دو مثلث}} \frac{EC \times BD}{2} = 2 \times \frac{DE \times BD}{2} \rightarrow ED = 2CE$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{E}_1 \\ \hat{H} = \hat{D} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{دو زاویه}]{\text{ز}} \triangle FBH \approx \triangle BDE$$



$$\frac{FB}{BE} = \frac{FH}{BC} \rightarrow \frac{x}{\sqrt{13}x} = \frac{1}{3x} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{1}{3x} \rightarrow 3x = \sqrt{13} \rightarrow x = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\text{طول ضلع مربع} = 3x = 3 \times \frac{\sqrt{13}}{3} = \sqrt{13} \rightarrow \text{ضلع مربع} = \sqrt{13}$$

$$BE^2 = (2x)^2 + (3x)^2 \rightarrow BE^2 = 4x^2 + 9x^2 = 13x^2 \rightarrow BE = \sqrt{13}x$$

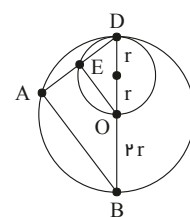
$$S = (\text{یک ضلع})^2 = (\sqrt{13})^2 = 13$$

۲۲

مشترک $\widehat{D} = \widehat{D}$

$\left. \begin{array}{l} \widehat{E} = \widehat{A} = 90^\circ \text{ رویه روی نیم دایره هستند} \\ \widehat{A}, \widehat{E} \text{ محاطی} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{(ز)}]{\text{طبق حالت دو زاویه}} \triangle DEO \sim \triangle DAB$

$$\frac{EO}{AB} = \frac{DO}{DB} = \frac{DE}{DA} = \frac{2r}{4r} = \frac{1}{2}$$



۲۳

گزینه ۳ حاصل جمع محیط شکل های داخل مثلث بزرگ برابر است با حاصل جمع محیط مثلث بزرگ با دو برابر حاصل جمع طول پاره خط ها.

$$\frac{(25 + 20) - 19}{2} = 13 \text{ cm}$$

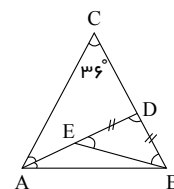
۲۴

گزینه ۱

۲۵

گزینه ۳ چون مثلث ACB متساوی الساقین است و زاویه ی رأس C برابر با 36° است. داریم:

$$\angle CAB = \angle ABD = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$



۲۶

مثلث ADB نیز متساوی الساقین است، بنابراین $\angle ABD = \angle EDB = 72^\circ$. در مثلث متساوی الساقین EDB، زاویه ی رأس D برابر

با 72° است. در نتیجه:

$$\angle DEB = \angle DBE = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$$

گزینه ۲) باتوجه به برابری زاویه‌های بین خطوط موازی و مورب:

$$\angle MAN = \angle ANB$$

$$\angle MBN = \angle BNC$$

$$\angle MCN = \angle CND$$

$$\angle MDN = \angle DNE$$

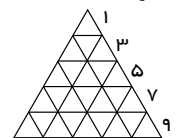
$$\text{مجموع زاویه‌های سمت چپ} = \angle ANB + \angle BNC + \angle CND + \angle DNE = \text{Arctan}\left(\frac{4}{5}\right)$$

سوال نادرست و پاسخ در گزینه‌ها نیست.

۲۷

گزینه ۴) تعداد مثلث‌های کوچک در هر ردیف به ترتیب از پایین برابر است با:

$$9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25 = \text{تعداد کل مثلث‌ها}$$



۲۸

گزینه ۳) اندازه‌ی هر یک از زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع 60° و اندازه‌ی هر زاویه‌ی یک پنج ضلعی منتظم 108° است. اکنون یک زاویه‌ی مثلث کوچک در پایین شکل 60° است. یک زاویه‌ی خارجی این مثلث 108° است. پس زاویه‌ی داخلی متناظر با این زاویه برابر با $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ است. پس زاویه سوم مثلث برابر است با:

$$180^\circ - 60^\circ - 72^\circ = 48^\circ$$

زاویه‌ی x زاویه‌ی خارجی متناظر با زاویه‌ی 48° و بنابراین، برابر است با:

$$x = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$$

۲۹

گزینه ۴)

$$\angle BCD = 80^\circ + 60^\circ = 140^\circ$$

$$\angle CBD = \frac{(180^\circ - 140^\circ)}{2} = 20^\circ$$

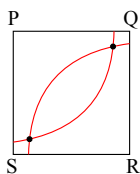
$$\angle ABD = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$$

۳۰

گزینه ۴) مستطیل $PQRS$ را رسم می‌کنیم به طوری که $PQ = RS = 2007$ و $PS = QR = 2009$. اکنون به مرکز P و به شعاع 2006 دایره‌ای رسم می‌کنیم. همچنین به مرکز R و شعاع 2008 دایره‌ای رسم می‌کنیم. دیده می‌شود با انتقال

۳۱

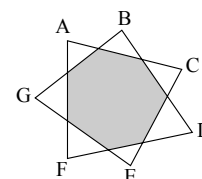
Q به یکی از دو نقطه‌ی برخورد این دایره‌ها چهارضلعی مورد نظر به دست می‌آید. اگر Q را به تقاطعی که نزدیک مکان فعلی آن است منتقل کنیم، دیده می‌شود هر چهار زاویه‌ی P، Q، R و S کوچک‌تر از 180° هستند. اما اگر Q را به تقاطعی که نزدیک S است منتقل کنیم، چهارضلعی دیگر محدب نیست و زاویه‌ی Q بیشتر از 180° می‌شود بنابراین تحت هر شرایطی S، P، R، S کوچکتر از 180° هستند. به جای مستطیل می‌توانیم از متوازی‌الاضلاع هم شروع کنیم.



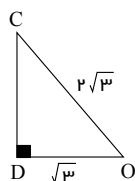
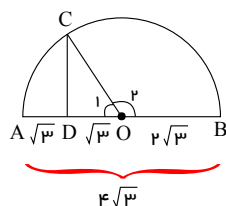
گزینه ۱ شکل زیر را به یک ۷ ضلعی و ۷ مثلث تقسیم‌بندی می‌کنیم. مجموع زوایای داخلی ۷ مثلث برابر $1260 = 7 \times 180$ می‌شود. اگر مجموع زوایای خارجی ۷ ضلعی را از مجموع زوایای داخلی ۷ مثلث کم کنیم، مجموع زاویه‌های خواسته شده به دست می‌آید. فقط دقت کنید که چون هر ضلع ۷ ضلعی از دو طرف امتداد داده شده است، پس دو برابر مجموع زوایای خارجی ۷ ضلعی را باید حساب کنیم.

$$2 \times 360 = 720 \Rightarrow 720 - 1260 = -540$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} + \hat{G} = 1260 - 720 = 540$$



۳۲



گزینه ۲ از آن جا که قطر دایره ۲ برابر OB (شعاع) است، پس هر شعاع این دایره $2\sqrt{3}$ می‌باشد.

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌روی زاویه‌ی 30° درجه نصف وتر است. باتوجه به نکته، در مثلث قائم‌الزاویه DOC زاویه‌ی C برابر با 30° درجه است.

در نتیجه: زاویه‌ی $\hat{O}_1 = 60^\circ$ و $\hat{O}_2 = 180 - 60 = 120$ درجه است و کمان BC روبه‌روی زاویه‌ی مرکزی $\hat{O}_2$ است پس برابر با آن، یعنی 120 درجه است.

۳۳

گزینه ۳ نکته: تعداد قطرهای n ضلعی محدب برابر است با:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

- اگر n به صورت $4k+2$ باشد،

$$\frac{n(n-3)}{2} = (2k+1)(4k-1)$$

فرد است. در حالی که n زوج است.

۳۴

- به ازای $n = 4$ تعداد قطرهای برابر ۲ است.

- به ازای $n = 10$ تعداد قطرهای برابر ۳۵ است.

- اگر $n^2 - 3n = 2 \times 28$ باید

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 224}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{233}}{2}$$

که عدد طبیعی نیست.

گزینه ۱ می توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} 50^\circ + \angle PBC = \angle B \\ 120^\circ + \angle PBC + \angle C = 180 \end{cases}$$

۳۵ با جمع کردن دو رابطه بالا نتیجه می شود:

$$2\angle PBC = 10^\circ$$

$$\angle PBC = 5^\circ$$

گزینه ۱ چهارضلعی $ABDC$ محاطی است. پس $\widehat{BDC}$ برابر $180^\circ - 3x$ و $180^\circ - 3x$ که مکمل آن است برابر با:

$$180 - (180 - 3x) = 3x$$

باتوجه به این که $\widehat{CDN}$ و $\widehat{BDM}$ متقابل به رأس اند پس CDN نیز برابر $3x$ است.

همان طور در مثلث $\widehat{CDN}$ مشخص است زاویه ی DCA زاویه ی خارجی می باشد و اندازه ی آن برابر است با مجموع زوایای x و $\widehat{CDN}$. پس زاویه ی $\widehat{DCA}$ برابر با $4x$ است.

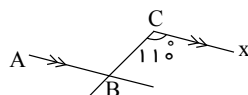
۳۶ به همین ترتیب زاویه ی $\widehat{ABD}$ نیز برابر $4x$ می باشد چون در چهارضلعی محاطی $ABCD$ مجموع $\widehat{ABD}$ و $\widehat{DCA}$ برابر 180° پس داریم:

$$4x + 4x = 180 \quad x = \frac{45}{2} = 22,5$$

۳۷ گزینه ۳ باید گزینه ای را انتخاب کنیم که 360° بر آن بخش پذیر باشد پس فقط زاویه $(\frac{1}{5})^\circ$ است که 360° بر آن بخش پذیر است.

گزینه ۱

AB و CX طبق فرض سوال موازیند.



۳۸ زاویه های B و C هم به دلیل مورب بودن BC برابرند بنابراین B نیز 110° است زاویه ی A و B مکمل اند پس A برابر 70° است و چون دوزنقه متساوی الساقین است، پس $\widehat{D} = \widehat{A} = 70^\circ$

گزینه ۳

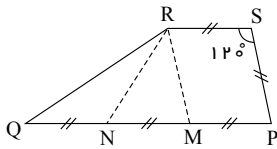
۳۹ $\hat{O}_1 = \hat{O}_6$, $\hat{O}_2 = \hat{O}_7$, $\hat{O}_3 = \hat{O}_8$, $\hat{O}_4 = \hat{O}_9$, $\hat{O}_5 = \hat{O}_{10}$ و $\hat{O}_4 = \hat{O}_9$ پس:

$$\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 + \widehat{O}_5 = \frac{360}{2} = 180^\circ$$

و در نتیجه حاصل جمع زاویه‌های خواسته شده برابر است با:

$$\sum_{i=1}^5 180^\circ - \widehat{O}_i = 5 \times 180 - 180 = 720^\circ$$

گزینه ۴ شکل زیر را در نظر بگیرید.



چون $PM \parallel RS$ و $PM = RS$ و $PMRS$ متوازی‌الاضلاع و در نتیجه لوزی است؛ پس $RM = MP$ و زاویه‌ی RMP برابر 120° است. زاویه‌ی RMN برابر 60° است و مثلث MNR متساوی‌الساقین است؛ پس $MN = NR$ و زاویه‌ی RNQ برابر 120° است. به

این ترتیب، زاویه‌ی PQR که همان زاویه‌ی NQR است، برابر است با $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$

پاسخنامه کلیدی

۱ ☆	۳	۹ ☆	۱	۱۷ ☆	۲	۲۵ ☆	۱	۳۳ ☆	۲
۲ ☆	۴	۱۰ ☆	۱	۱۸ ☆	۴	۲۶ ☆	۳	۳۴ ☆	۳
۳ ☆	۴	۱۱ ☆	۲	۱۹ ☆	۳	۲۷ ☆	۲	۳۵ ☆	۱
۴ ☆	۴	۱۲ ☆	۱	۲۰ ☆	۴	۲۸ ☆	۴	۳۶ ☆	۱
۵ ☆	۲	۱۳ ☆	۲	۲۱ ☆	۲	۲۹ ☆	۳	۳۷ ☆	۳
۶ ☆	۴	۱۴ ☆	۴	۲۲ ☆	۲	۳۰ ☆	۴	۳۸ ☆	۱
۷ ☆	۲	۱۵ ☆	۴	۲۳ ☆	۳	۳۱ ☆	۴	۳۹ ☆	۳
۸ ☆	۲	۱۶ ☆	۴	۲۴ ☆	۳	۳۲ ☆	۱	۴۰ ☆	۴



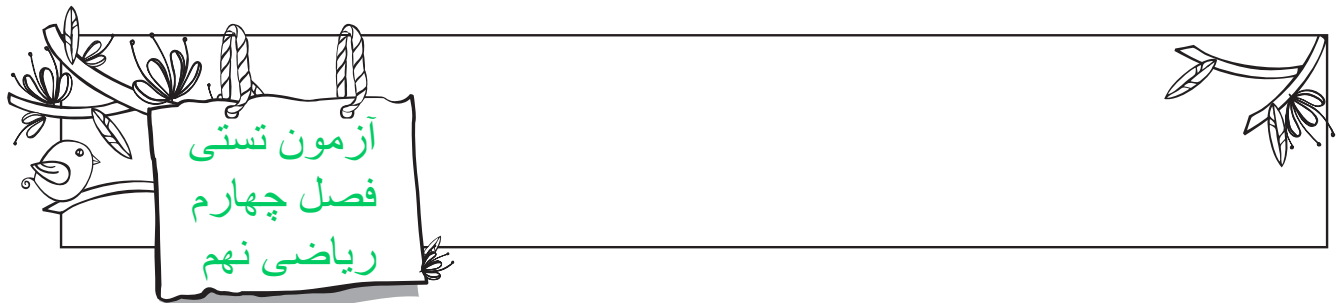
۱	حاصل عبارت A کدام است؟ $A = (2^{-17} + 2^{15} \times 4^{-10} \div 16^3 + 2^0) \div \frac{1}{2^{-16} - 1}$ $\frac{2^{-18} - 1}{2^{-16} - 1}$ (۴) $\frac{2^{-16} + 1}{2^{-16} - 1}$ (۳) $\frac{1}{2^{32}}$ (۲) $\frac{1 - 2^{32}}{2^{32}}$ (۱)
۲	دو مثلث زیر با هم متشابه‌اند. مقدار $\sqrt{x^2 + y^2}$ کدام است؟ 4 (۲) 3 (۱) 7 (۴) 5 (۳)
۳	اگر فاصله زمین تا خورشید را با سرعت نور طی کنیم چند دقیقه طول می‌کشد؟ (سرعت نور برابر 3×10^8 و فاصله زمین تا خورشید 15×10^{10} است) 5000 (۴) 83 (۳) $8,3$ (۲) 500 (۱)
۴	حاصل عبارت $3 \times 4 \div 8 + (2 - 2) \times 2^{13} \times (4 - 5)^3 - 5(-1 + 3(4 - 5))$ برابر است با: (تیزهوشان و نمونه دولتی استان‌های آذربایجان غربی، شرقی، اردبیل و زنجان ۹۳-۹۲) -4 (۴) 56 (۳) 61 (۲) 6 (۱)
۵	اگر $x < -1$ باشد، حاصل $A = 1 - x + \sqrt{x^2}$ کدام است؟ 1 (۴) -1 (۳) $-2x - 1$ (۲) $2x - 1$ (۱)
۶	چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟ $-(-3)^{400} > -3^{-400}$ اگر $0 < y < x$ باشند، آنگاه $\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{y^2}$ برابر $x - y$ است. اگر $x < y$ باشد، آنگاه $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ است. اگر $y^2 > x^2$ باشد، آنگاه $y < x$ است. 3 (۴) 2 (۳) 1 (۲) 0 (۱)
۷	چند عدد صحیح به جای x می‌توان قرار داد تا رابطه $4900 \times 10^{-6} < 4,9 \times 10^x < 0,00049 \times 10^9$ برقرار باشد؟ 9 (۴) 10 (۳) 14 (۲) 7 (۱)
۸	حاصل $\sqrt{4^{4(-4)} - 4}$ کدام است؟ (تیزهوشان ۹۶-۹۵) $2^{4(-4)-4}$ (۴) $4^{2(-4)-4}$ (۳) $4^{4(-4)-4}$ (۲) $4^{4(-4)-2}$ (۱)





می دانیم $\sqrt{(-5)^4 a^5 b^3}$ عددی حقیقی است. در مورد ادعاهای زیر چه می توان گفت؟ (نمونه دولتی البرز و قزوین ۹۶ - ۹۵) (۱) $\sqrt{(-5)^4 a^5 b^3} = (-5)^2 a^2 b \sqrt{ab}$ (۲) $\sqrt{(-5)^4 a^5 b^3} = 5^2 a^2 b \sqrt{ab}$ (۳) $\sqrt{(-5)^4 a^5 b^3} = 5^2 a^2 \sqrt{ab^3}$ (۱) هر سه ادعا درست است. (۲) فقط ادعای دوم درست است. (۳) فقط ادعای دوم و سوم درست است. (۴) فقط ادعای اول و دوم درست است.	۹
اگر $a < -1$ و $n \in N$ باشد، آن گاه می توان گفت: (تیزهوشان و نمونه دولتی استان گلستان ۹۳-۹۲) (۱) $a^{2n} > a^{2n-1}$ (۲) $a^{2n} < a^{2n-1}$ (۳) $a^{2n} = a^{2n-1}$ (۴) $a^{2n} < 3a^{2n-1}$	۱۰
اگر $e = 3^{15}$، $d = 2^{41}$، $c = 3^{41}$، $b = 2^{43}$ و $\alpha = 3^{42}$ باشد، آنگاه کدام عدد از بقیه بزرگتر است؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی استان های آذربایجان غربی، شرقی، اردبیل و زنجان ۹۳-۹۲) (۱) α (۲) b (۳) c (۴) e	۱۱
باقی مانده و خارج قسمت تقسیم $5^{1395} + 5^{1394} + 5^{1393} + 5^{1392}$ بر ۷۸۰ به ترتیب عبارتند از: (تیزهوشان و نمونه دولتی استان های آذربایجان غربی، شرقی، اردبیل و زنجان ۹۳-۹۲) (۱) صفر و 5^{1392} (۲) صفر و 5^{1391} (۳) ۵ و 5^{1392} (۴) ۵ و 5^{1392}	۱۲
نماد علمی حاصل عبارت $7,23 \times 10^{-1395} + 7,23 \times 10^{-1394} + 7,23 \times 10^{-1396}$ کدام است؟ (نمونه دولتی آذربایجان غربی ۹۶-۹۵) (۱) $7,2365 \times 10^{-1393}$ (۲) $7,2365 \times 10^{-1394}$ (۳) $7,2365 \times 10^{-1395}$ (۴) $7,2365 \times 10^{-1396}$	۱۳
حاصل عبارت زیر به صورت توان دار کدام است؟ (نمونه دولتی اردبیل ۹۶-۹۵) $2^{-105} + 2^{75} \times 4^{-45} \div 8^{30} = ?$ (۱) 2^{-106} (۲) 2^{-104} (۳) 2^{-30} (۴) 2^{-210}	۱۴
حاصل عبارت $\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} \times \sqrt[6]{7 + 4\sqrt{3}}$ کدام است؟ (۱) $\sqrt[4]{2 - \sqrt{3}}$ (۲) $\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$ (۳) $\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}}$ (۴) ۱	۱۵
حاصل عبارت زیر کدام است؟ $\sqrt[3]{25} \times \sqrt{125} \times \sqrt[4]{125} \times \sqrt[12]{5}$ (۱) $\sqrt[12]{125}$ (۲) $\sqrt[12]{5}$ (۳) ۱۲۵ (۴) $\sqrt[24]{5}$	۱۶





۱۷	اگر ریشه‌ی سوم عدد A برابر $\frac{2}{5}$ باشد، ریشه‌ی دوم عدد A برابر است با: (نمونه دولتی البرز ۹۶ - ۹۵)	$\frac{4}{5\sqrt{10}}$ (۱)	$\frac{2\sqrt{2}}{25}$ (۲)	$\sqrt{\frac{2}{5}}$ (۳)	$\frac{2\sqrt{10}}{25}$ (۴)
۱۸	حاصل عبارت $\left(\frac{3}{\sqrt{9}}\right)^2 \times (\sqrt[3]{3})^5$ برابر است با: (نمونه دولتی کرمان ۹۶ - ۹۵)	$\left(\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\right)^7$ (۱)	$(\sqrt[3]{3})^7$ (۲)	$(3\sqrt[3]{3})^7$ (۳)	$(3\sqrt[3]{9})^7$ (۴)
۱۹	اگر $5^x = 2$ و $a = 0$ باشد مقدار عبارت $125^{2a} \times 25^{2x-1}$ برابر است با: (تیزهوشان و نمونه دولتی استان گلستان ۹۳ - ۹۲)	$\frac{16}{25}$ (۱)	$\frac{9}{25}$ (۲)	$\frac{12}{125}$ (۳)	$\frac{9}{125}$ (۴)
۲۰	کدامیک از اعداد مقابل از بقیه اعداد بزرگتر است؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی تهران ۹۳ - ۹۲)	4^{300} (۱)	3^{401} (۲)	2^{31} (۳)	20^{23} (۴)

@riazicafe



پاسخنامه
تشریحی

گزینه ۳

$$A = (2^{-17} + 2^{15} \times 2^{-10} \div 16^3 + 2^0) \div \frac{1}{2^{-16} - 1}$$

باتوجه به اولویت در پранتز، ضرب، تقسیم، جمع و تفريق به صورت زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا از ضرب داخل پرانتز شروع می‌کنیم:

$$\gamma^{1\Delta} \times \gamma^{-1\circ} = \gamma^{1\Delta} \times \gamma^{-2\circ} = \gamma^{-\Delta}$$

سپس عمل تقسیم را انجام می‌دهیم.

$$r^{-5} \div 16^3 = r^{-5} \div r^{f(3)} = r^{-5} \div r^{12} = r^{-5} \times r^{-12} = r^{-17}$$

از طرفی $۲^{\circ} = ۱$ پس داریم:

$$r^{-1\vee} + r^{-1\vee} + 1 = r^{-1\vee}(1 + 1) + 1 = (r^{-1\vee} \times r) + 1 = r^{-1\<} + 1$$

در نتیجه:

$$A = (r^{-1\epsilon} + 1) \div \frac{1}{r^{-1\epsilon} - 1} \Rightarrow \frac{r^{-1\epsilon} + 1}{r^{-1\epsilon} - 1}$$

گزینه ۳) باتوجه به تساوی زوایای متناظر، تناسب اضلاع متناظر را می نویسیم:

$$\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{q}} = \frac{\mathfrak{r}}{y + \mathfrak{r}} = \frac{\lambda}{\Delta x - \lambda} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{q}} = \frac{\mathfrak{r}}{y + \mathfrak{r}} \Rightarrow \mathfrak{F}(y + \mathfrak{r}) = \mathfrak{r}\mathfrak{F} \Rightarrow y + \mathfrak{r} = \mathfrak{F} \Rightarrow y = \mathfrak{r} \\ \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{q}} = \frac{\lambda}{\Delta x - \lambda} \Rightarrow \mathfrak{F}(\Delta x - \lambda) = \mathfrak{r}\mathfrak{r} \Rightarrow \Delta x - \lambda = \mathfrak{r}\mathfrak{r} \Rightarrow x = \mathfrak{r} \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

گزینه ۲ با تقسیم فاصله زمین، خورشید مدت زمان طی کردن آن بدست می آید:

$$\frac{15 \times 10^{10}}{3 \times 10^8} = x \Rightarrow 5 \times 10^2 = 500 \text{ ثانية}$$

ثانيه دقيقه

1 60

$x \quad 500 \Rightarrow 1,3$ دقیقه

رگزینه ۳

$$5 - 5(-1 + 3) \underbrace{(4 - 5)^{2 \times 13}}_{(-1)^{2 \times 13} = -1} \times 2 - 2 + \underbrace{8 \div 4 \times 3}_6 =$$

منفی به توان فرد منفی می شود

پاسخ داخل پرانتز: $-1 + 3 \times (-1) \times 2 - 2 = -1 - 3 \times 2 - 2 = -1 - 6 - 2 = -9$

حق تقدم با ضرب است

پاسخ نهایی: $5 - 5 \times (-9) + 6 = 5 + 45 + 6 = 56$

گزینه ۲ نکته: $\sqrt{x^2} = |x|$

اگر $x < -1$ باشد، $|x| = -x$ است. به این ترتیب حاصل A برابر است با: $A = |1 - (-x)| + |x| = |1 + x| + (-x)$
و حالا اگر $x < -1$ باشد، $1 + x < 0$ خواهد بود و $|1 + x| = -(1 + x) = -x - 1$

$$A = -x - 1 - x = -2x - 1$$

پس حاصل A برابر خواهد بود با گزینه ۲.

گزینه ۲ به بررسی درستی عبارتها می پردازیم:

$$-(-3)^{400} > -3^{-400} \quad (3- \text{ به توان زوج مثبت می شود})$$

$$\Rightarrow -3^{400} > -3^{-400} \Rightarrow -3^{400} > -\frac{1}{3^{400}} \quad \text{نادرست است.}$$

اگر $0 < x < y$ باشد، آنگاه $\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{y^3}$ برابر $x - y$ است.

$$\sqrt{y^2} = |y| = -y$$

$$\sqrt[3]{x^3} = x$$

$$\Rightarrow \sqrt{y^2} + \sqrt[3]{x^3} = -y + x = x - y \quad \text{درست است.}$$

اگر $x < y$ باشد، آن گاه $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ است.

مثال نقض: $3 < 2$ ، ولی $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

اگر $y^2 > x^2$ باشد، آنگاه $y < x$ است.

مثال نقض: $(-1)^2 > (-2)^2$ ، ولی $-2 < -1$

پس فقط یک مورد از عبارتهای صورت سؤال صحیح است.

گزینه ۱ ابتدا دو طرف نامساوی را به صورت نماد علمی می نویسیم:

$$4900 \times 10^{-6} = 4,9 \times 10^3 \times 10^{-6} = 4,9 \times 10^{-3}$$

$$0,00049 \times 10^9 = 4,9 \times 10^{-4} \times 10^9 = 4,9 \times 10^5$$

$$4,9 \times 10^{-3} < 4,9 \times 10^x < 4,9 \times 10^5$$

بنابراین اعداد صحیح $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ و 4 را می توان به جای x گذاشت. یعنی ۷ مقدار.

گزینه ۴

$$\sqrt{4^{(-4)^{-4}}} = \sqrt{4^a} = (4^a)^{\frac{1}{2}} = (4^{\frac{1}{2}})^a = (\sqrt{4})^a = 2^a = 2^{4^{(-4)^{-4}}}$$

گزینه ۳ در ادعای اول چون b داخل قدر مطلق نیست پس غلط است اما ادعای دوم و سوم صحیح است.

۱۰	گزینه ۱ نکته (۱): اگر اعداد منفی به توان زوج برسند مثبت می شوند و به توان فرد برسند منفی می مانند. نکته (۲): هر عدد به شکل $2n$ عددی زوج و به شکل $2n - 1$ عددی فرد است. در گزینه ی (۱) که a^{2n} عددی مثبت است از a^{2n-1} که عددی منفی است بزرگتر است.
----	---

۱۱	گزینه ۳ رابطه ی (۱) $e = 4^{315} = (2^2)^{315} = 2^{630} \Rightarrow 2^{630} > 2^{431} \Rightarrow e > d$ $d = 2^{431}$ رابطه ی (۲) اگر طرف اول در ۲ ضرب شود باز هم دو طرف را به توان ۴۲ می بریم $21 < 31 \xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۴۲ می بریم}} 21^{42} < 31^{42} \xrightarrow{\text{خیلی کوچکتر از ۳۱ می شود}} 21 \times 21^{42} < 31^{42}$ $\Rightarrow 21^{43} < 31^{42} < (3^{10})^{42} \times 3^1 \Rightarrow b < a < c$ توجه: ($3^6 = 729$, $2^9 = 512$) رابطه ی (۳) به توان ۷۰ می بریم $2^9 < 3^6 \xrightarrow{\text{به توان ۷۰ می بریم}} 2^{630} < 3^{420} < 3^{431} \Rightarrow e < c$ از رابطه ی ۱، ۲، ۳ $c = 3^{431}$ از همه بزرگتر است
----	--

۱۲	گزینه ۲ می دانیم: $5^{1393} = 5^1 \times 5^{1392}, \quad 5^{1394} = 5^2 \times 5^{1392} = 25 \times 5^{1392}$ $5^{1395} = 5^3 \times 5^{1392} = 125 \times 5^{1392}$ از 5^{1392} فاکتور می گیریم: $5^{1392} + 5^{1393} + 5^{1394} + 5^{1395} = 1 \times 5^{1392} + 5 \times 5^{1392} + 25 \times 5^{1392} + 125 \times 5^{1392} = 156 \times 5^{1392}$ $\frac{156 \times 5^{1392}}{780} = \frac{5^{1392}}{5^1} = 5^{1391}$ چون بخش پذیر بود، پس باقی مانده صفر است.
----	---

۱۳	گزینه ۱ $0.065 \times 10^{-1394} + 723 \times 10^{-1395} = 0.065 \times 10^{-1394} + 72.3 \times 10^{-1394}$ $= 10^{-1394} (0.065 + 72.3) = 10^{-1394} \times 72.365 = 7.2365 \times 10^{-1393}$
----	---

۱۴	گزینه ۲ $2^{-105} + 2^{75} \times 2^{-90} \div 2^{90} = 2^{-105} + 2^{75-90-90} = 2^{-105} + 2^{-105} = 2 \times 2^{-105} = 2^{-104}$
----	--

گزینه ۴	۱۵	$\sqrt[6]{(2-\sqrt{3})^2} \times \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(7-4\sqrt{3}) \times (7+4\sqrt{3})} = \sqrt{49-48} = 1$
گزینه ۳	۱۶	$\sqrt[12]{5^8} \times \sqrt[12]{5^{18}} \times \sqrt[12]{5^9} \times \sqrt[12]{5} = \sqrt[12]{5^8 \times 5^{18} \times 5^9 \times 5} = \sqrt[12]{5^{36}} = 5^3 = 125$
گزینه ۴	۱۷	$\sqrt[3]{A} = \frac{2}{5} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} A = \frac{8}{125}$ $\sqrt{A} = \sqrt{\frac{8}{125}} = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{5}} \xrightarrow[\text{در } \sqrt{5} \text{ ضرب می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج را}} \frac{2\sqrt{10}}{25}$
گزینه ۲	۱۸	$\frac{3^2}{\sqrt[3]{9^2}} \times \sqrt[3]{3^5} = \frac{9}{\sqrt[3]{81}} \times \sqrt[3]{243} = 9 \times \frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{81}} = 3^2 \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^9 \times 3} = (\sqrt[3]{3})^7$
گزینه ۱	۱۹	$25^{2x-1} \times 125^{2a} = (5^2)^{2x-1} \times 125^{2 \times 0} = 5^{4x-2} \times 125^0 = 5^{4x-2} \times 1 = \frac{5^{4x}}{5^2} = \frac{2^4}{25} = \frac{16}{25}$
گزینه ۲	۲۰	$\left. \begin{array}{l} 20 < 2^{10} \xrightarrow{\text{به توان ۲۳ می‌بریم}} 20^{23} < 2^{230} < 2^{231} \\ 2^3 < 3^2 \xrightarrow{\text{به توان ۲۰۰ می‌بریم}} 2^{600} < 3^{400} < 3^{401} \end{array} \right\} \Rightarrow 20^{23} < 2^{231} < 2^{600} < 3^{401}$

