

مسعود زیر کاری

(حجم و مساحت)

ناحیه یک زاهدان

حجم: مقدار فضایی را که یک جسم اشغال می کند حجم (گنجایش) نام دارد و حجم را با حرف انگلیسی (V) نشان می دهند.

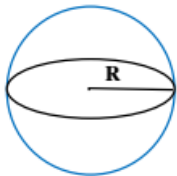
انواع حجم: (۱) حجم منشوری (۲) حجم هرمی یا مخروطی (۳) حجم کروی

دایره: مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله تمام نقاط از یک نقطه به نام (مرکز دایره) به یک اندازه باشد. به این فاصله نقاط صفحه

@riaziat789

تا مرکز دایره (شعاع دایره) می گویند.
 مرکز
 شعاع
 نکته: دایره را به اختصار به صورت $C(O, R)$ نشان می دهند.

کره: مجموعه نقاطی از فضا که فاصله تمام نقاط از یک نقطه به نام (مرکز کره) به یک اندازه باشد. به این فاصله نقاط صفحه تا مرکز دایره (شعاع کره) می گویند.



مانند: کره زمین و توپ

فرمول مساحت کره: $S = 4\pi r^2$

فرمول حجم کره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

مثال: حجم و مساحت کره با قطر ۴ سانتی متر را به دست آورید.

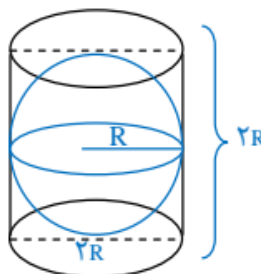
شعاع کره $4 \div 2 = 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{3}{14} \times 2^3 = 33/49 \\ S = 4\pi r^2 = 4 \times \frac{3}{14} \times 2^2 = 50/24 \end{array} \right.$$

مثال: نسبت عددی حجم کره به مساحت کره چند است.

$$\frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}r$$

نکته: اگر کره به طور کامل داخل استوانه قرار گیرد. می گوئیم کره بر استوانه محاط شده و استوانه بر کره محیط شده است.



درسنامه و نکات کلیدی

فصل هشتم

پایه نهم

مسعود زیر کاری

(حجم و مساحت)

ناحیه یک زاهدان

مثال: کره ای در استوانه ای به قطر ۶ سانتی متر محاط شده است :

$$\text{شعاع کره } 6 \div 2 = 3 \text{ cm}$$

الف) حجم کره را به دست آورید.

$$v = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3/14 \times 3^3 = 113/0.4 \text{ cm}^3$$

ب) حجم استوانه را به دست آورید.

$$v = s \times h = (3 \times 3 \times 3/14) \times 6 = 169/56 \text{ cm}^3$$

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

$$169/56 - 113/0.4 = 56/52 \text{ cm}^3$$

نکته: از دوران نیم دایره حول قطر کره حاصل می شود.

نکته: از دوران ربع دایره حول شعاع نیم کره حاصل می شود.

@riaziat789

نکته: برای به دست آوردن حجم نیم کره می توان از رابطه ی $v = \frac{2}{3} \pi r^3$ استفاده کرد.

مثال: حجم حاصل از دوران ربع دایره حول شعاع ۴ سانتی متر را به دست آورید. (بر حسب π)

(از دوران ربع دایره حول شعاع نیم کره حاصل می شود)

$$v = \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi \times 4^3 = 42/66 \pi$$

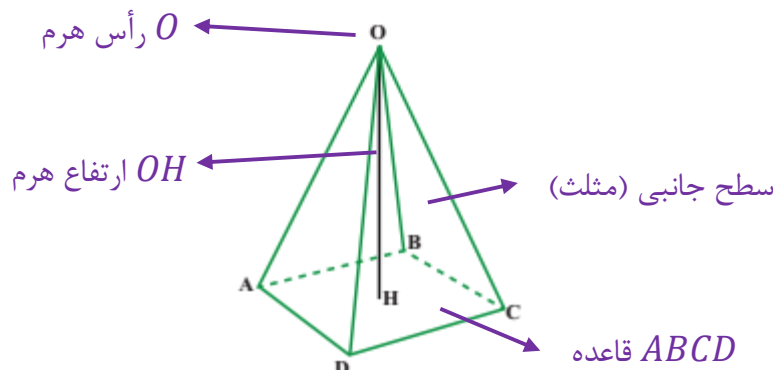
نکته: اگر شعاع کره را n برابر کنیم مساحت کره n^2 و حجم کره n^3 برابر خواهد شد.

مثال: اگر شعاع کره ای را ۴ برابر کنیم مساحت و حجم کره چند برابر خواهد شد.

برابر $v = n^3 = 4^3 = 64$ برابر $s = n^2 = 4^2 = 16$

هرم: شکل فضایی که سطح جانبی آن مثلث و وجه زیرین (قاعده) آن چند ضلعی محدب باشد.

نکته: به فاصله رأس هرم تا قاعده ارتفاع هرم می گویند.



مسعود زیر کاری

حجم هرم: الف) کلامی:

(حجم و مساحت)

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} \times \frac{1}{3} = \text{حجم هرم}$$

ناحیه یک زاهدان

ب) جبری:

$$v = \frac{s \times h}{3}$$

مساحت مربع

مثال: حجم هرم مربع القاعده ای به ضلع ۵ سانتی متر و ارتفاع ۶ سانتی متر را به دست آورید.

$$v = \frac{s \times h}{3} = \frac{(5 \times 5) \times 6}{3} = 50 \text{ cm}^3 \quad (\text{خودش} \times \text{یک ضلع} = s \text{ مربع})$$

مثال: قاعده لوزی با قطرهای ۶ و ۸ سانتی متر است. اگر ارتفاع هرم ۵ سانتی متر باشد حجم هرم چند سانتی متر مکعب است.

مساحت لوزی

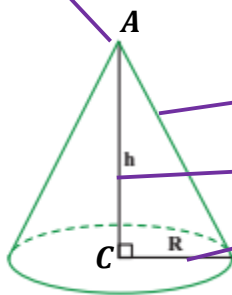
$$v = \frac{s \times h}{3} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{6 \times 8}{2} \right) \times 5 = 40 \text{ cm}^3 \quad \left(\text{حاصل ضرب دو قطر} = s \text{ لوزی} \right)$$

نکته: اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع یکسان باشند. دارای حجم برابر هستند.

مخروط: شکلی شبیه ای هرم منتظم که قاعده آن دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز دایره باشد.

@riaziat789

رأس مخروط A



مولد مخروط AB

ارتفاع مخروط AC

شعاع قاعده BC

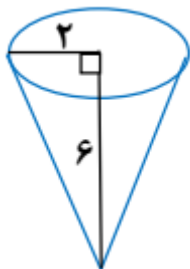
$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} \times \frac{1}{3} = \text{حجم مخروط}$$

حجم مخروط: الف) کلامی:

$$v = \frac{s \times h}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

ب) جبری:

مثال: حجم مخروط زیر را حساب کنید.



$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3.14 \times 2^2 \times 6 = 25.12 \text{ cm}^3$$

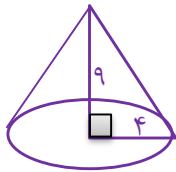
مثال: گنجایش مخروطی ۴۷۱۰۰ لیتر است. اگر شعاع قاعده ۳ متر باشد ارتفاع مخروط چند متر است.

(هر متر مکعب ۱۰۰۰ لیتر است.) $47100 \div 1000 = 47/1 m^3$ حجم مخروط

$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow 47/1 = \frac{1}{3} \times 3/14 \times 3^2 \times h \Rightarrow h = \frac{47/1}{9/42} = 5 m$$

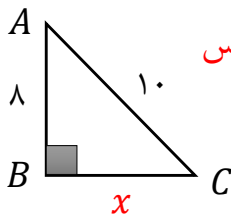
نکته: از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم آن مخروط حاصل می شود. ضلعی که دوران روی آن انجام شده است ارتفاع مخروط و ضلع دیگر شعاع قاعده نام دارد.

مثال: مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائم ۴ و ۹ سانتی متر را روی ضلع بزرگتر دوران داده ایم. حجم شکل حاصل چند سانتی متر مکعب است.



$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3/14 \times 4^2 \times 9 = 150/72 cm^3$$

مثال: مثلث قائم الزاویه ABC را روی حول ضلع AB دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را به دست آورید.



شعاع قاعده $x^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow x = 6$: رابطه فیثاغورس

$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3/14 \times 6^2 \times 8 = 301/44 cm^3$$

@riaziat789

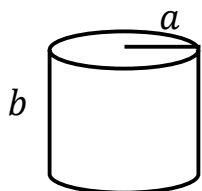
نکته: از دوران مستطیل و مربع حول یک ضلع آن استوانه تشکیل می شود.

نکته: مساحت جانبی و مساحت کل استوانه از رابطه های زیر به دست می آید :

$$s = p \times h \Rightarrow \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی}$$

$$S = \text{دو قاعده} + S \text{ جانبی} = S \text{ کل} \Rightarrow \text{مساحت دو قاعده} + \text{مساحت جانبی} = \text{مساحت کل}$$

مثال: نسبت حجم به مساحت کل استوانه ای را به دست آورید که شعاع قاعده آن a و ارتفاع آن b باشد.

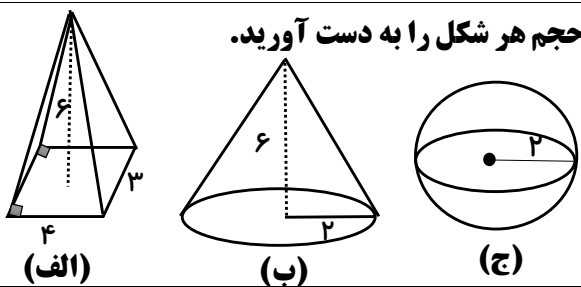


$$v = s \times h = (a \times a \times \pi) \times b = \pi a^2 b$$

$$s = p \times h = (2 \times a \times \pi) \times b = 2 \pi a b$$

$$S = \text{دو قاعده} + S \text{ جانبی} = 2 \pi a b + 2 \pi a^2 = 2 \pi a (b + a)$$

$$\frac{v}{s} = \frac{\pi a^2 b}{2 \pi a (a + b)} = \frac{ab}{2(a + b)}$$

ردیف	سؤالات	ردیف	سؤالات
۱	الف) حجم و مساحت کره با شعاع ۴ سانتی متر را به دست آورید. ب) اگر قطر کره ۶ سانتی متر باشد حجم کره را به دست آورید. ج) مساحت کره ای را که حجم آن 36π است را به دست آورید.	۷	کره ای با قطر ۸ سانتی متر در استوانه محاط شده است : الف) حجم کره را به دست آورید. ب) حجم استوانه را به دست آورید. ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.
۲	حجم هر شکل را به دست آورید. 	۸	الف) اگر حجم هرمی ۷۲ سانتی متر مکعب و ارتفاع آن ۹ سانتی متر باشد. مساحت قاعده هرم چند سانتی متر مربع است. ب) حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن لوزی با قطرهای ۶ و ۴ سانتی متر و ارتفاع ۵ سانتی متر است.
۳	الف) حجم شکل حاصل از دوران نیم دایره ای حول قطر ۱۰ سانتی متر را به دست آورید. ب) مثلثی با اضلاع قائم ۳ و ۴ سانتی متر را حول ضلع ۴ دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را به دست آورید	۹	الف) مساحت رویه ی عرق چین به شعاع ۶ سانتی متر : ب) مساحت کل نیم کره چوبی توپر به شعاع ۶ سانتی متر : ج) بین این دو مساحت چه تفاوتی است.
۴	الف) گسترده هرم مربع القاعده را رسم کنید. ب) حجم حاصل از دوران ربع دایره ای حول شعاع ۵ سانتی متر را به دست آورید. ج) حجم هرم مربع القاعده به ضلع ۳ و ارتفاع ۵ چند است.	۱۰	از دوران مستطیلی با ابعاد ۴ و ۷ سانتی متر ، حول طول : الف) شکل حاصل دارای چه قاعده ای است. ب) ارتفاع شکل حاصل چند است. ج) حجم شکل حاصل را به دست آورید.
۵	هرم منتظم مقابل طول تمام یال های آن a است : الف) گسترده هرم را رسم کنید. ب) مساحت جانبی هرم چند است ج) مساحت کل هرم را به دست آورید.	۱۱	با $\frac{3}{4}$ دایره ای با شعاع ۱۰ سانتی متر ، مخروطی ساخته ایم : الف) طول کمان AB : ب) شعاع مخروط :
۶	نسبت حجم به مساحت کل اجسام زیر را بنویسید. الف) کره ای با قطر ۴ سانتی متر ب) استوانه ای با شعاع ۲ و ارتفاع ۳ سانتی متر ج) مکعبی به ضلع ۲ سانتی متر	۱۲	الف) شعاع کره ای را ۲ برابر کنیم ، مساحت و حجم آن چه تغییری می کند. ب) اگر شعاع مخروطی را نصف و ارتفاع را ۲ برابر کنیم ، حجم مخروط حاصل چه کسری از حجم مخروط اولیه است.

الف) $S_{کره} = 4\pi R^2 = 4 \times 3,14 \times \frac{25}{16} = 200,96$

$V_{کره} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times 3,14 \times \frac{125}{64} = 257,94$

ب) شعاع کره $3 = 2 \div 4$ قطر $V = \frac{4}{3} \times 3,14 \times \frac{27}{8} = 113,04$

ج) $V_{کره} = 36\pi \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Rightarrow R^3 = \frac{36\pi}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{108}{4} = 27$
 $R = \sqrt[3]{27} = 3$

$S_{کره} = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times 9 = 36\pi$

نکته) اگر شعاع کره ۳ سانتی متر باشد. مساحت و حجم کره با هم برابر هستند (۳۶π یا ۱۱۳,۰۴)

۲) عرض $\times$ طول = مساحت $V_{هرم} = \frac{S \times h}{3} = \frac{(4 \times 3) \times 4}{3} = 16$

ب) $V_{هرم} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{3,14 \times \frac{4}{1} \times \frac{4}{1}}{3} = 25,12$

@riaziat789

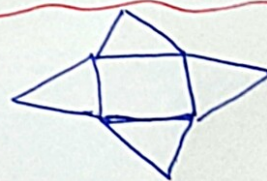
ج) $V_{کره} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times 3,14 \times \frac{1}{8} = 33,49$

۳) نکته) از دوران نیم دایره حول قعره، کره حاصل می‌شود. الف) $V_{کره} = \frac{4}{3} \times 3,14 \times \frac{125}{8} = 523,33$

ب) نکته) از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم الزاویه حاصل می‌شود و مساحت دوران شده ارتفاع است. $V_{هرم} = \frac{3,14 \times \frac{4}{1} \times \frac{4}{1}}{3} = 37,48$

ج) نکته) از دوران ربع دایره حول شعاع نیم کره حاصل می‌شود. $V_{نیم کره} = \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3} \times 3,14 \times \frac{125}{8} = 261,26$

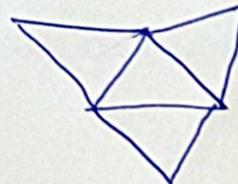
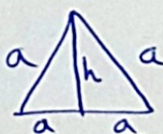
د) $V_{هرم} = \frac{S \times h}{3} = \frac{(3 \times 3) \times 5}{3} = 15$



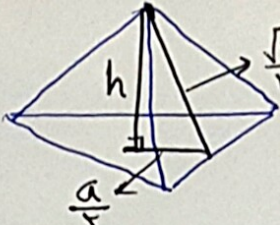
۴) الف)

رابطه فیثاغورس

الف) $h = a - \left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2}$
 $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$



۵) الف)

ب) 
$$h^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{2}{4}a^2$$
$$h = \sqrt{\frac{2}{4}a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$
 ارتفاع هرم

نکته: برای رسم کردن سطح جانبی هر یک از مثلثات، ارتفاع و الاضلاع را رسم کرده ایم:

$$S_{\text{جانبی}} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$
 تعداد مثلث

الف) $4 \div 2 = 2$ شعاع کره $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{32}{3}\pi$

$$S_{\text{کره}} = 4 \times \pi \times r^2 = 16\pi$$
$$\frac{V}{S_{\text{کره}}} = \frac{\frac{32}{3}\pi}{16\pi} = \frac{32}{48} = \frac{2}{3}$$

ب) $V = \pi \times r^2 \times h = 12\pi$ و $S_{\text{کل}} = 2\pi R(R+h) = 2\pi \times 2(2+3) = 20\pi$

$$\frac{V_{\text{استوان}}}{S_{\text{کل استوان}}} = \frac{12\pi}{20\pi} = \frac{3}{5}$$

ج) $V_{\text{مکعب}} = a^3 = 2^3 = 8$ و $S_{\text{کل مکعب}} = 6a^2 = 6 \times 2^2 = 24$

$$\frac{V_{\text{مکعب}}}{S_{\text{کل مکعب}}} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

نکته: کره در استوانه محاط باشد. شعاع کره و استوانه برابر است و ارتفاع استوانه با قطر کره برابر است. شعاع $8 \div 2 = 4$

الف) $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{256}{3}\pi$

ب) $V = \pi \times r^2 \times h = 128\pi$

ج) $128\pi - \frac{256}{3}\pi = \frac{384\pi - 256\pi}{3} = \frac{128}{3}\pi$

@riaziat789

$$\text{الف)} \quad V = \frac{S \times h}{3} \Rightarrow 72 = \frac{S \times 9}{\frac{1}{3}} \Rightarrow S = \frac{72}{3} = 24 \quad (1)$$

$$\text{ب)} \quad V = \frac{S \times h}{3} = \frac{12 \times 5}{\frac{1}{3}} = 20 \quad S_{\text{لوزی}} = \frac{4 \times 12}{1} = 12$$

$$\text{الف)} \quad S_{\text{کره نیم کره}} = 2\pi R^2 = 2 \times 3,14 \times \frac{4^2}{36} = 226,08 \quad (9)$$

$$\text{ب)} \quad S_{\text{کره توپر}} = 3\pi R^2 = 3 \times 3,14 \times \frac{4^2}{36} = 339,12$$

ج) در مساحت نیم کره توپر مساحت قاعده اضافه می شود.

10 نکته) از دوران مستطیل حول یک ضلع آن استوانه تشکیل می شود.

الف) قاعده دایره است. (عدد 2 ارتفاع است) (ضلع دوران شده ارتفاع استوانه است)

$$\text{ج)} \quad V = \pi R^2 h = 3,14 \times \frac{4^2}{16} \times 7 = 351,68$$

$$\text{الف)} \quad \widehat{AB} = \frac{3}{4} \times \frac{\text{میدان دایره}}{2\pi R} = \frac{3}{4} \times \frac{4 \times 3,14 \times 10}{2\pi \times 1} = 47,1 \quad (11)$$

$$\text{ب)} \quad \widehat{AB} = \frac{\text{میدان قاعده مخروط}}{2\pi R} \Rightarrow 47,1 = \frac{2 \times 3,14 \times R^2}{4,28} \Rightarrow R = \frac{47,1 \times 4,28}{2 \times 3,14} = 7,5$$

نمای مخروط

12 الف) مساحت کره $4\pi R^2$ برابر و حجم $\frac{4}{3}\pi R^3$ برابر می شود

$$\text{ب)} \quad R \xrightarrow{\text{نصف}} \frac{R}{2} \quad h \xrightarrow{\text{دو برابر}} 2h$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \times (\frac{R}{2})^2 \times 2h}{3} = \frac{\pi \times \frac{R^2}{4} \times 2h}{3} = \frac{\pi R^2 h}{6}$$

$$\frac{V_{\text{مخروط حاصل}}}{V_{\text{مخروط اول}}} = \frac{\frac{\pi R^2 h}{6}}{\frac{\pi R^2 h}{3}} = \frac{3\pi R^2 h}{6\pi R^2 h} = \frac{1}{2}$$

تبرکات

@riaziat789