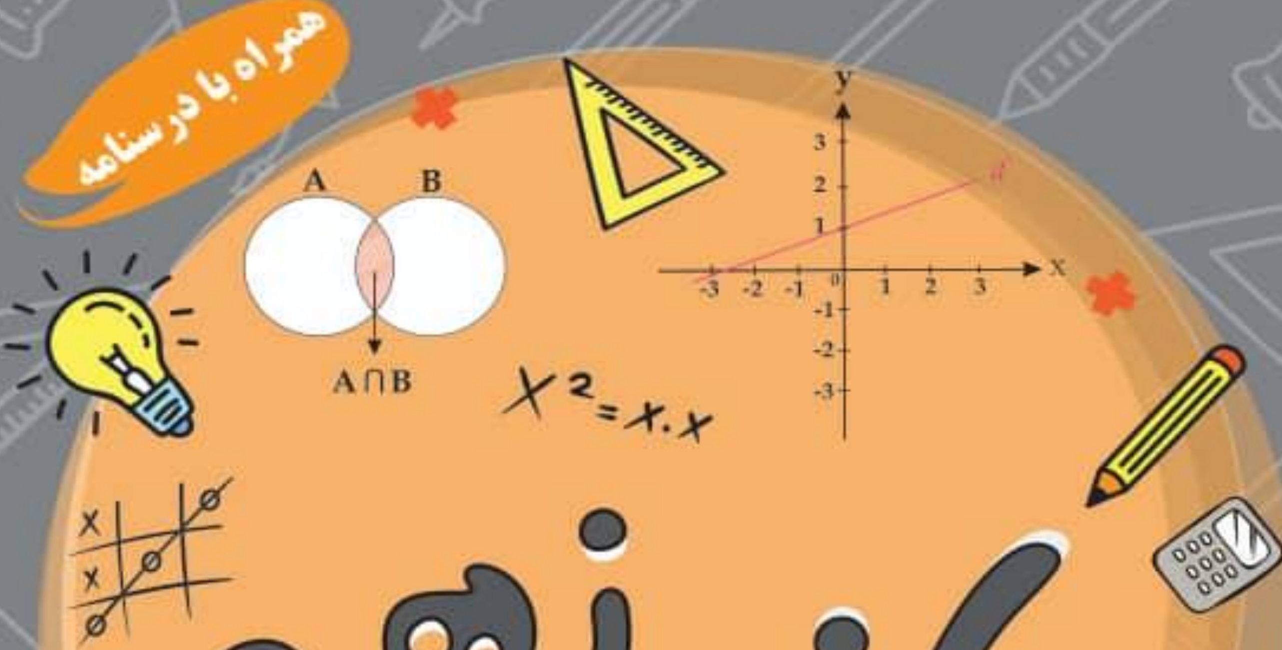
همراه با درسنامه



ریاضی نهم

@riazicafe

- نکات و توضیحات کتاب ریاضی
- پایه نهم
- دوره اوّل متوسطه
- گروه آموزشی ریاضی متوسطه اول استان خوزستان

سیده مریم علوی فر – سیده سمیه علوی فر

مدرسه تعطیل است ولی آموزش تعطیل نیست.

بسمه تعالی

درسنامه، نکات و تمرینات فصل پنجم ریاضی پایه نهم. گرد آورنده: سیده مریم علوی فر، سیده سمیه علوی فر

درس اول: عبارت های جبری و مفهوم اتحاد

یک جمله ای: هر عبارتی که به صورت ضرب یک عدد حقیقی و یک یا چند متغیر با توان های صحیح نامنفی باشد، یک جمله ای نامیده می شود.

عبارت های زیر همگی یک جمله ای هستند.

$\pi, -\frac{۲}{۵}x^۳y^۲, -\sqrt{۳}n^۳m^۵, -۹, -۱۲xy^۴$

دقت کنید که یک عدد نیز به تنهایی، یک جمله ای محسوب می شود. مانند: $\sqrt{۳}, ۷, -\frac{۱}{۳}$

عبارت هایی که یک جمله ای نمی باشند:

۱) اگر متغیر دارای توان منفی باشد. مثال: $۵x^{-۲}$

۲) اگر متغیر زیر رادیکال باشد (هر فرجه ای داشته باشد). مثال: $\sqrt[۳]{a^۲}, ۲\sqrt{x^۲}$

۳) اگر متغیر در قدر مطلق باشد. مثال: $|x|$

۴) اگر متغیر در مخرج کسر باشد. مثال: $\frac{۱}{x}$

۵) اگر متغیر در توان باشد. مثال: -۴^x

۶) اگر دو جمله ای باشد، یعنی بین جملات جمع یا تفریق باشد. مثال: $۵x^۲, -۴x$

یک جمله ای متشابه:

به دو یا چند یک جمله ای که عبارت حرفی یکسان (حرف ها و توان آن ها مثل هم باشند) یک جمله ای متشابه گویند.

مثال:

$(-۷a^۲b, ۳ba^۲)$

عبارت $-۷a^۲b$ و $۳ba^۲$ با هم متشابه هستند زیرا قسمت حرفی آن ها یعنی «$a^۲b$» یکسان می باشد.

ولی $۶x^۲y^۳$ و $۶x^۳y^۲$ با هم متشابه نیستند زیرا قسمت حرفی آن ها یعنی «$x^۲y^۳$» و «$x^۳y^۲$» یکسان نمی باشد.

نکته: در یک عبارت جبری فقط جمله های متشابه را می توان جمع جبری کرد.

تذکر: در جمع جمله های متشابه فقط ضرایب عددی با هم جمع می شوند و متغیرها هیچ تغییری نمی کنند.

دقت کنید: یک جمله ای های غیرمتشابه را نمی توان با هم جمع کرد.

مثال: عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $\left(\frac{۲}{۳}x^۲y\right)^۳ = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۳ (x^۲)^۳y^۳ = \frac{۸}{۲۷}x^۶y^۳$

چون یک جمله ای توان دار می باشد ضریب عددی یعنی «$\frac{۲}{۳}$» و متغیرها را به توان می رسانیم و حاصل را به دست می آوریم.

ب) $(۲x^۲y)(۳x^۲y^۳) + xy^۳(-۵x^۳y) = (۲ \times ۳)(x^۲ \times x^۲)(y \times y^۳) + (-۵)(x \times x^۳)(y^۳ \times y)$
$= ۶x^۴y^۴ - ۵x^۴y^۴ = x^۴y^۴$

درجه یک جمله ای: در یک جمله ای $-۷xy^۲z^۳$ ، درجه نسبت به x برابر ۱، درجه نسبت به y برابر ۲، درجه نسبت به z برابر ۳ است؛ درجه نسبت به متغیر x و y برابر $۳ = ۲ + ۱$ و نسبت به y و z برابر $۵ = ۳ + ۲$ و نسبت به x و z برابر $۴ = ۳ + ۱$ تعریف می کنیم.

درجه چندجمله ای: درجه ی یک چند جمله ای نسبت به یک متغیر برابر است با بزرگترین توان که آن متغیر در بین جمله ها دارد.

مثال: درجه چند جمله ای $۱۵ + ۴a^۵ - ۷a$ نسبت به متغیر a برابر ۵ می باشد.

درجه یک چندجمله ای نسبت به دو یا چند متغیر برابر است با جمع توان های آن متغیرها (توان های متغیر های یک جمله ای ها را در یک عبارت چند جمله ای جمع می کنیم حاصل هر کدام بیشتر شد آن عدد درجه ی آن چند جمله ای را نسبت به آن متغیرها نشان می دهد.)

مثال: درجه ی یک جمله ای $-۹x^۲y^۵z$ نسبت به x برابر ۲ است و نسبت به y برابر ۵ است و نسبت به z برابر ۱ و نسبت به t برابر صفحه است. درجه نسبت به y و x برابر ۷ می باشد. (جمع درجه ی x و y)

چند جمله های استاندارد:

هرگاه در یک چندجمله ای جمله ها را نسبت به توان های یک متغیر نزولی (از بزرگ به کوچک) مرتب کنیم به آن چند جمله ای، چند جمله ای استاندارد می گوییم.

تذکر: برای پیدا کردن درجه یک چند جمله ای نسبت به یک یا چند متغیر بهتر است ابتدا آن چند جمله ای را استاندارد کنیم سپس درجه ی آن را نسبت به متغیرهای خواسته شده به دست آوریم.

مثال: چندجمله ای زیر را نسبت به a استاندارد کنید. سپس درجه ی آن را نسبت به متغیرهای خواسته شده بنویسید.

$$۵a^۲b^۳ - ۳a^۳b + ۹ab^۲ = -۳a^۳b + ۵a^۲b^۳ + ۹ab^۲$$

پاسخ: توان ها را نسبت به متغیر a از بزرگ به کوچک مرتب می کنیم.

درجه نسبت به a : ۳ (بزرگترین توان a را می نویسیم)

درجه نسبت به b : ۳ (بزرگترین توان b در بین جمله ها را می نویسیم)

درجه نسبت به a و b : $۲ + ۳ = ۵$ (توان متغیرها را در یک جمله ای ها جمع می کنیم و حاصل هر کدام بیشتر شد درجه ی آن چند جمله ای را نسبت به آن متغیر نشان می دهیم)

مثال: عبارت های جبری زیر را ساده و سپس آن را نسبت به توان های نزولی x مرتب و همچنین درجه ی آن را نسبت به متغیرهای خواسته شده بنویسید.

$$-۵a^۲ - ۳ax + x^۲ - [۴a^۲ + ۵ax - (۳a^۲ - ۸ax)]$$

پاسخ:

$$= -۵a^۲ - ۳ax + x^۲ - [۴a^۲ + ۵ax - ۳a^۲ + ۸ax]$$
$$= -۵a^۲ - ۳ax + x^۲ - ۴a^۲ - ۵ax + ۳a^۲ - ۸ax$$
$$= -۶a^۲ - ۱۵ax + x^۲$$
$$= x^۲ - ۱۵ax - ۶a^۲$$

درجه نسبت به x : ۲ ، درجه نسبت به a : ۲ ، درجه نسبت به x و a : $۱ + ۱ = ۲$

در ابتدا طبق رعایت اولویت ها عبارت جبری را ساده می کنیم، عبارت داخل پرانتز را قرینه می کنیم و بقیه عبارت را می نویسیم سپس عبارت داخل کروشه را قرینه می کنیم و می نویسیم، آنگاه عبارت جبری را بر اساس جملات متشابه ساده می کنیم و حاصل را به دست می آوریم، در نتیجه با توجه به توان نزولی x ، عبارت را مرتب می کنیم.

اتحاد: یک تساوی جبری که به ازای همه ی مقادیر درست باشد، را اتحاد می نامیم.

مثال: عبارت $(x + ۱)^۲ = x^۲ + ۲x + ۱$ اتحاد است، زیرا به ازای تمام مقدارهایی که به جای متغیرهایش قرار می دهیم، تساوی برقرار است.

x	$(x+۱)^۲$	$x^۲+۲x+۱$
-۲	$(-۲+۱)^۲=(-۱)^۲=۱$	$(-۲)^۲+۲(-۲)+۱=۴-۴+۱=۱$
۰	$(۰+۱)^۲=(۱)^۲=۱$	$(۰)^۲+۲(۰)+۱=۰+۰+۱=۱$
۵	$(۵+۱)^۲=(۶)^۲=۳۶$	$(۵)^۲+۲(۵)+۱=۲۵+۱۰+۱=۳۶$
$\frac{۳}{۲}$	$\left(\frac{۳}{۲}+۱\right)^۲=\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲=\frac{۲۵}{۴}$	$\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲+۲\left(\frac{۳}{۲}\right)+۱=\frac{۹}{۴}+۳+۱=۴+\frac{۹}{۴}=\frac{۲۵}{۴}$

در ستون اول مقدار x داده شده، (-۲) می باشد، در عبارت جبری ستون دوم جایگزین می کنیم، ابتدا حاصل درون پرانتز را به دست می آوریم و آن را به توان می رسانیم، در ستون سوم مقدار x را در عبارت جایگزین می کنیم طبق رعایت اولویت ها حاصل را به دست می آوریم بقیه ی مقادیر داده شده ی x را به همین طریق جایگزین می کنیم چون به ازای تمام مقادیر هر دو ستون با هم برابر شدند پس عبارت فوق، اتحاد است.

سؤال: آیا $x+۱=۳$ اتحاد است؟ چرا؟ به ازای چند مقدار مختلف مانند $x=۰$ ، $x=-۳$ ، $x=۲$ و ... عبارت را آزمایش می کنیم.

$x=۰ \Rightarrow ۰+۱ \Rightarrow ۱\neq ۳$
$x=-۳ \Rightarrow -۳+۱ \Rightarrow -۲\neq ۳$
$x=۲ \Rightarrow -۲+۱=۳ \Rightarrow ۳=۳$

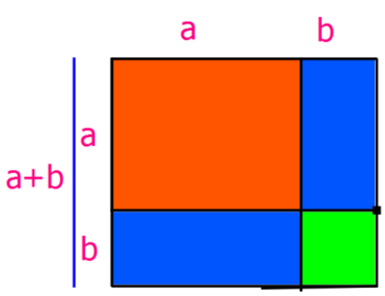
خیر، زیرا این عبارت فقط به ازای ۲ درست است پس اتحاد نیست این عبارت یک معادله می باشد.

سؤال: تفاوت اتحاد دو معادله چیست؟ اتحاد به ازای تمام مقادیر یکه به جای متغیرهایش انجام می دهیم، درست است، اما معادله به ازای بعضی مقادیر مشخص درست می باشد.

اتحاد مربع دو جمله ای:

اولین اتحادی که لازم است آن را بیاموزید اتحاد مربع دو جمله ای است. مربع دو جمله ای می تواند مربوط به حالت جمع دو جمله یا تفاضل دو جمله باشد.

در شکل زیر اثبات هندسی اتحاد مربع مجموع دو جمله ای را بنویسید.



مساحت بزرگترین مربع شکل فوق به ضلع $a+b$ برابر است با مساحت دو مربع و دو مستطیل درون آن.

مساحت کل شکل $=(a+b)^۲=S_۱+۲S_۳+S_۲$

اتحاد مربع دوجمله ای:

$(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$

الف) جبری:

ب) کلامی:

مربع جمله دوم + ۲ برابر حاصلضرب جمله ها + مربع جمله اول $=$ $($جمله دوم + جمله اول$)^۲$

دقت کنید: برای حالتی که بین دو جمله علامت منفی وجود داشته باشد با مربع تفاضل دو جمله ای مواجه هستیم.

برای محاسبه طرف دوم اتحاد به صورت زیر عمل می کنیم:

$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$

مثال: حاصل عبارت های جبری را به کمک اتحاد به دست آورید.

پاسخ: مربع جمله ی اول بعلاوه دو برابر حاصلضرب جمله ها، بعلاوه مربع جمله دوم، سپس حاصل را به دست می آوریم.

الف) $(۲a+۵)^۲ = (۲a)^۲ + ۲(۲a)(۵) + ۵^۲ = ۴a^۲ + ۲۰a + ۲۵$

مربع جمله ی اول $= (۲a)^۲ = ۴a^۲ \Rightarrow$ جمله اول $= ۲a$

دو برابر حاصلضرب جمله ها $= ۲(۲a)(۵) = ۲۰a$

مربع جمله دوم $۵^۲ = ۲۵ \Rightarrow$ جمله دوم $= ۵$

پاسخ: مربع جمله ی اول منهای دو برابر حاصلضرب جمله ها، بعلاوه مربع جمله دوم، سپس حاصل را به دست می آوریم.

ب) $(a^۳ - bc)^۲ = (a^۳)^۲ - ۲a^۳(-bc) + (-bc)^۲ = a^۶ - ۲a^۳bc + b^۲c^۲$

مربع جمله ی اول $= (a^۳)^۲ = a^۶ \Rightarrow$ جمله اول $= a^۳$

دو برابر حاصلضرب جمله ها $= ۲a^۳(-bc) = -۲a^۳bc$

مربع جمله دوم $= (-bc)^۲ = b^۲c^۲ \Rightarrow$ جمله دوم $= bc$

ج) $\left(a+\frac{۱}{a}\right)^۲ = a^۲ + ۲(a)\left(\frac{۱}{a}\right) + \left(\frac{۱}{a}\right)^۲ = a^۲ + ۲ + \frac{۱}{a^۲}$

توجه: به هر یک از تساوی های بالا، اتحاد مربع دو جمله ای می گوییم. تساوی قسمت «الف» را اثبات می کنیم.

$(۲a+۵)^۲ = (۲a+۵)(۲a+۵) = ۲a(۲a) + ۲a(۵) + ۵(۲a) + ۵(۵) = ۴a^۲ + ۱۰a + ۱۰a + ۲۵$
$= ۴a^۲ + ۲۰a + ۲۵$

تجزیه ی یک عبارت جبری:

تبدیل یک عبارت جبری به ضرب دو یا چند عبارت جبری دیگر با درجه کمتر را تجزیه گوییم.

روش های تجزیه:

۱) فاکتورگیری ۲) استفاده از اتحادها ۳) ترکیبی (فاکتورگیری همراه با اتحاد)

فاکتورگیری: برای تجزیه ی یک عبارت با استفاده از فاکتورگیری مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱) (ب.ب.م) ضرایب را تعیین می کنیم.

۲) حروف مشترک با توان کمتر را انتخاب می کنیم.

۳) (ب.ب.م) و حروف مشترک را به عنوان فاکتور می گیریم.

۴) تمام جملات را بر عامل فاکتور تقسیم کرده و جواب را داخل پرانتز می نویسیم.

مثال: عبارت های زیر را تجزیه کنید.

الف) $ab + ac = a(b+c)$

پاسخ: حروف مشترک با توان کمتر را به عنوان فاکتور انتخاب می کنیم تمام جملات را بر عامل فاکتور یعنی «a» تقسیم می کنیم و جواب را داخل پرانتز می نویسیم.

ب) $۱۵m^۲n - ۲۰mn^۲ = ۵xy(۳x - ۴y)$

ج) $۷x^۲y^۳ + ۲۱x^۳y - ۴۹xy = ۷xy(xy^۲ + ۳x^۲ - ۷)$

تجزیه به کمک اتحادها:

برای تجزیه ی یک عبارت سه جمله ای به کمک اتحاد مربع دو جمله ای آن عبارت سه جمله ای باید دارای دو ویژگی باشد:

۱) جمله های اول و سوم جذر داشته باشند.

۲) جمله ی وسط از ضرب عدد ۲ در جذر دو جمله ی دیگر به دست آمده باشد.

در این صورت از جمله های اول و سوم جذر گرفته و چنانچه جمله ی وسط جمع باشد بین آن ها جمع و اگر تفریق بوده بین آن ها علامت منها قرار داده و به توان ۲ می نویسیم و در پایان آن را به صورت ضرب دو عبارت دو جمله ای می نویسیم.

مثال: عبارت های زیر را به کمک اتحاد مربع دو جمله ای تجزیه کنید.

الف) $a^۲ + ۲ab + b^۲ = (a+b)^۲ = (a+b)(a+b)$

ب) $۴x^۲ + ۱۲xy + ۹y^۲ = (۲x + ۳y)^۲ = (۲x+۳y)(۲x+۳y)$

ج) $۹x^۴ - ۱۲x^۲y + ۴y^۲ = (۳x^۲ - ۲y)^۲ = (۳x^۲ - ۲y)(۳x^۲ - ۲y)$

تجزیه ی ترکیبی (فاکتورگیری و اتحاد):

در بعضی از عبارت ها ابتدا باید با استفاده از فاکتورگیری از عوامل مشترک فاکتورگیری می کنیم و سپس با استفاده از اتحاد عبارت به دست آمده را تجزیه می کنیم.

الف) $a^۳ - ۲a^۲ + a = a(a^۲ - ۲a + ۱) = a(a-۱)^۲ = a(a-۱)(a-۱)$

ابتدا با استفاده از فاکتورگیری از عامل مشترک یعنی«a» فاکتور می گیریم و سپس با استفاده از اتحاد عبارت را تجزیه می کنیم.

ب) $۲۵m^۴ + ۳۰m^۳ + ۹m^۲ = m^۲(۲۵m^۲ + ۳۰m + ۹) = m^۲(۵m+۳)^۲ = m^۲(۵m+۳)(۵m+۳)$

درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها

اتحاد مربع سه جمله ای:

$$(a+b+c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲ac + ۲bc$$

کلامی:

(اولی + دومی + سومی)^۲ = (اولی)^۲ + (دومی)^۲ + (سومی)^۲ + ۲ (اولی) (دومی) + ۲ (اولی) (سومی) + ۲ (دومی) (سومی)

مثال: حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد مربع سه جمله ای به دست آورید.

$$(۲a - ۳b - c)^۲ = (۲a)^۲ + (-۳)^۲ + (-c)^۲ + ۲(۲a)(-۳b) + ۲(۲a)(-c) + ۲(-۳b)(-c)$$
$$= ۴a^۲ + ۹b^۲ + c^۲ - ۱۲ab - ۴ac + ۶bc$$

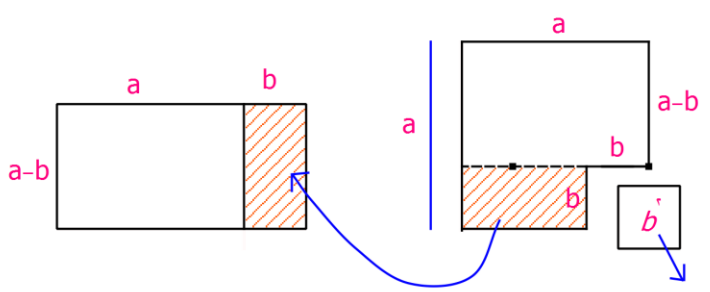
اتحاد مزدوج:

الف) جبری: برای هر دو a و b داریم: $(a+b)(a-b) = a^۲ - b^۲$

یعنی: حاصلضرب مجموع دو جمله در تفاضل همان دو جمله برابر است با مربع جمله ی اول منهای مربع جمله ی دوم.

ب) کلامی: (جمله اول + جمله دوم) (جمله اول − جمله دوم) = (جمله اول)^۲ − (جمله دوم)^۲

پ) اثبات هندسی:



مثال: حاصل هر عبارت را به کمک اتحاد به دست آرید.

الف) $(۳x - ۴)(۳x + ۴) = (۳x)^۲ - (۴)^۲ = ۹x^۲ - ۱۶$

ب) $(x + \sqrt{۲})(x - \sqrt{۲}) = (x)^۲ - (\sqrt{۲})^۲ = x^۲ - ۲$

پ) $(۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۵})(۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۵})=(۲\sqrt{۳})^{۲}-(۳\sqrt{۵})^{۲}=۴\times ۳-۹\times ۵=۱۲-۴۵=-۳۳$

ت) $(a-۲b+۵)(a+۲b-۵)=[a-(۲b-۵)][a+(۲b-۵)]=a^{۲}-(۲b-۵)^{۲}$

$=a^{۲}-(۴b^{۲}-۲۰b+۲۵)=a^{۲}-۴b^{۲}+۲۰b-۲۵$

نوشتن سمت چپ اتحاد مزدوج از روی جواب آن:

$$\left(\frac{۱}{۲}x-\frac{۲}{۳}y\right)\left(\frac{۱}{۲}x+\frac{۲}{۳}y\right)=\frac{۱}{۴}x^{۲}-\frac{۴}{۹}y^{۲}$$

برای به دست آوردن سمت چپ جذر جمله ی اول سمت راست یعنی $\frac{۱}{۴}$ و جمله ی دوم سمت راست یعنی $\frac{۴}{۹}$ را می گیریم و درون پرانتز قرار می دهیم، جمله ی اول هر دو پرانتز و جمله ی دوم هر دو پرانتز هم هستند فقط با علامت های $+$ و $-$ می باشند.

تجزیه ی یک عبارت به کمک اتحاد مزدوج:

در حالت کلی: $a^{۲}-b^{۲}=(a-b)(a+b)$

تذکر: عبارتی را می توان به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کرد که دارای سه ویژگی باشد:

۱- دو جمله ای باشد. ۲- هر دو جمله مربع کامل باشند. ۳- بین دو جمله علامت منها باشد.

در این صورت برای تجزیه از دو جمله ی داده شده جذر گرفته و یک بار آن ها را جمع کرده و بار دیگر تفریق کرده و آن ها را به صورت ضرب دو عبارت می نویسیم.

مثال: به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنید.

الف) $x^{۲}-۹=(x-۳)(x+۳)$

جذر $x^{۲}$ برابر x و جذر ۹ برابر ۳ می شود سپس آن ها را به صورت دو عبارت یک بار جمع و یک بار تفریق کرده و می نویسیم.

ب) $۱۶ax^{۲}-a=a(۱۶x^{۲}-۱)=a(۴x-۱)(۴x+۱)$

شرط ۲ برقرار است، از روش فاکتورگیری استفاده می کنیم سپس عبارت درون پرانتز را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می کنیم.

پ) $(۲x+۱)^{۲}-y^{۲}=[(۲x+۱)+y][(۲x+۱)+y]=(۲x+۱-y)(۲x+۱+y)$

نکته: استفاده از اتحادها، می تواند بعضی از محاسبات به ظاهر مشکل را به راحتی امکان پذیر کند.

مثال: به کمک اتحادها حاصل عبارت را به دست آورید.

الف) $۴۹۷\times ۵۰۳=(۵۰۰-۳)(۵۰۰+۳)=(۵۰۰)^{۲}-(۳)^{۲}=۲۵۰۰۰۰-۹$

می توانیم این دو عدد را در هم ضرب کنیم، به جواب برسیم اما ممکنه اعداد خیلی بزرگ به دست بیاید، می توانیم به کمک اتحاد مزدوج به جواب برسیم و به جای ۴۹۷ و ۵۰۳ بنویسیم:

$۴۹۷=۵۰۰-۳$ و $۵۰۳=۵۰۰+۳$

اگر بخواهیم عدد (۱۰۰۱) را در خودش ضرب کنیم عددی به دست می آید اما از اتحادها راحت تر به جواب می رسیم، می نویسیم: $(۱۰۰۱)=۱۰۰۰+۱$

حال اگر به توان ۲ برسانیم چطور می شود:

$$(۱۰۰۱)^{۲}=(۱۰۰۰+۱)^{۲}=(۱۰۰۰)^{۲}+۲(۱۰۰۰)(۱)+۱^{۲}$$

به کمک اتحاد مربع دو جمله ای به جواب برسیم.

اتحاد جمله مشترک:

الف) جبری: برای هر عدد حقیقی a و b داریم:

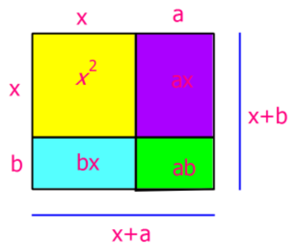
$$(x+a)(x+b)=x^{۲}+(a+b)x+ab$$

ب) کلامی:

(جمله غیر مشترک دوم + جمله مشترک)(جمله غیر مشترک اول + جمله مشترک)

= حاصل ضرب دو جمله غیر مشترک + (جمله مشترک)(مجموع دو جمله غیر مشترک) + ^{۲}(جمله مشترک)

پ) روش هندسی: در شکل زیر اثبات هندسی اتحاد جمله مشترک را می بینید.



مستطیل بزرگ $S = (x+a)(x+b)$

مستطیل بزرگ $S = x^{۲} + ax + bx + ab = x^{۲} + (a+b)x + ab$

$$\Rightarrow (x+a)(x+b) = x^{۲} + (a+b)x + ab$$

مثال: حاصل هر عبارت را به کمک اتحاد به دست آورید.

با توجه به رابطه ی کلامی در قسمت «ب» مثال ها را حل می کنیم.

الف) $(x+۳)(x+۵) = x^{۲} + (۳+۵)x + ۳\times۵ = x^{۲} + ۸x + ۱۵$

ب) $(۳a-۲)(۳a-۷) = (۳a)^{۲} + \big(-۲+(-۷)\big)(۳a) + (-۲)\times(-۷) = ۹a^{۲} - ۲۷a + ۱۴$

پ) $(۲a-۴)(۲a+۸) = (۲a)^{۲} + (-۴+۸)(۲a) + (-۴)\times(۸) = ۴a^{۲} + ۸a - ۳۲$

تذکر: حاصل اتحاد جمله مشترک مانند اتحاد مربع دو جمله ای دارای ۳ جمله است، با این تفاوت که در اتحاد جمله مشترک جمله ی سوم جذر ندارد.

تجزیه اتحاد جمله مشترک:

$$x^{۲} + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

تذکر: عباراتی را می توان به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه کرد که دارای سه ویژگی باشد:

۱) سه جمله ای باشد.

۲) جمله اول و جمله سوم جذر دقیق داشته باشد.

۳) ضریب x ، حاصل جمع و عدد آخر، حاصلضرب دو عدد را نشان می دهد.

بنابراین برای تجزیه اتحاد جمله مشترک دو پرانتز باز کرده و در هر دو پرانتز ابتدا جذر جمله مشترک را نوشته، سپس با توجه به علامت دو جمله غیرمشترک، علامت مناسب بعد از جمله مشترک قرار داده و دو عدد غیرمشترک را پیدا می کنیم.

مثال: به کمک اتحاد جمله مشترک تجزی کنید.

الف) $x^{۲} + ۷x + ۱۲ = (x+۵)(x+۷)$

ب) $y^{۲} + ۱y - ۶ = (y+۳)(y-۲)$

پ) $x^{۲} - ۲x - ۸ = (x-۴)(x+۲)$

درس سوم: نابرابری ها و نامعادله ها

نابرابری:

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند سه حالت داریم: « a کوچکتر از b »، « a بزرگتر از b » یا « a مساوی b » که فقط یکی از این سه حالت ها را خواهیم داشت.

نکته: هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a > b$ ، در این صورت عدد حقیقی مثبتی مانند $P > ۰$ وجود دارد به طوری که $a = b + P$

مثال: برای تساوی های زیر یک نابرابری بنویسید.

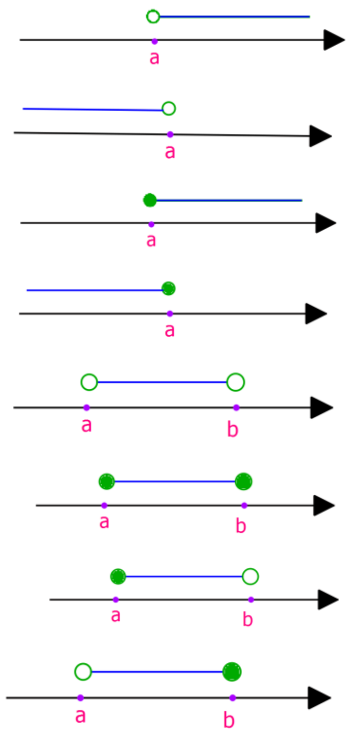
الف) $a - ۲ = b + ۳$

$a = b + ۳ + ۲ \quad \Rightarrow \quad a = b + ۵ \quad \Rightarrow \quad a > b$

ب) $۲m = ۳n$

$m = \frac{۳}{۲}n \quad \Rightarrow \quad m > n$

برای نمایش نابرابری ها روی محور طبق شکل های زیر عمل می کنیم.



عددهای بزرگتر از a $\quad x > a$

عددهای کوچکتر از a $\quad x < a$

عددهای بزرگتر یا مساوی a $\quad x \geq a$

عددهای کوچکتر یا مساوی a $\quad x \leq a$

عددهای بزرگتر از a و کوچکتر از b $\quad a < x < b$

عددهای بزرگتر یا مساوی a و کوچکتر یا مساوی b $\quad a \leq x \leq b$

عددهای بزرگتر یا مساوی a و کوچکتر از b $\quad a \leq x < b$

عددهای بزرگتر از a و کوچکتر یا مساوی b $\quad a < x \leq b$

هر نامساوی یکی از نمادهای زیر را دارد:

کوچکتر یا مساوی $(\leq)$

نماد کوچکتر $(<)$

بزرگتر یا مساوی $(\geq)$

بزرگتر $(>)$

مخالف $(\neq)$

نماد	مفهوم
$x < y$	x کوچکتر از y یا (y بزرگتر از x)
$x > y$	x بزرگتر از y یا (y کوچکتر از x)
$x \leq y$	x کوچکتر یا مساوی با y
$x \geq y$	x بزرگتر یا مساوی با y

خواص نابرابری ها:

مثال: به دو طرف نابرابری های زیر عددهای دلخواه را اضافه کنید آیا نابرابری برقرار است؟

$۲ < ۱۰ \quad \Rightarrow \quad ۲ + ۴ < ۱۰ + ۴ \quad \Rightarrow \quad ۶ < ۱۴$

$۹ > -۳ \quad \Rightarrow ۹ - ۷ > -۳ - ۷ \quad \Rightarrow ۲ > -۱۰$

۱) اگر دو طرف یک نا مساوی را با عددی مانند c جمع کنیم، نابرابری زیر برقرار است:

$x > a \quad \Rightarrow \quad a + c > b + ۳$

مثال: به دو طرف نابرابری های زیر عددهای دلخواه را ضرب کنید، آیا نابرابری ها تغییر می کنند؟

$-۳ < ۷ \quad , ۴ > ۰ \quad \Rightarrow \quad -۳ \times ۴ < ۷ \times ۴ \quad \Rightarrow \quad -۱۲ < ۲۸$

$\frac{۲}{۵} > \frac{۱}{۱۰} \quad , ۱۰ > ۰ \quad \Rightarrow \quad \frac{۲}{۵} \times ۱۰ > \frac{۱}{۱۰} \times ۱۰ \quad \Rightarrow ۴ > ۱$

۲) اگر دو طرف یک نامساوی را در عدد مثبتی مانند $c > ۰$ ضرب یا تقسیم کنیم، نابرابری زیر برقرار است:

$a > b \,, \quad c > ۰ \quad \Rightarrow \quad ac > bc$

مثال: اگر دو طرف نابرابری های زیر را در عدد منفی دلخواه ضرب یا تقسیم کنیم آیا جهت نابرابری تغییر می کند؟

$۳ > -۸ \quad , \quad -۳ < ۰ \quad \Rightarrow ۲ \times (-۳) < -۸ \times (-۳) \quad \Rightarrow -۶ < ۲۱$

$-۷ < -۲ \quad , \quad -۴ < ۰ \quad \Rightarrow -۷ \times (-۴) < -۲ \times (-۴) \quad \Rightarrow ۲۸ > ۸$

۳) اگر دو طرف یک نامساوی را در عدد منفی مانند $c < ۰$ ضرب یا تقسیم کنیم، نابرابری تغییر می کند.

$a > b \,, \quad c < ۰ \quad \Rightarrow \quad ac < bc$

نامعادله: اگر نامساوی دارای متغیر باشد به آن نامعادله می گوییم. مانند: $۲x + ۱ > ۷$

مجموعه جواب نامعادله: به مجموعه مقادیر (عددهایی) که به ازای آن نامعادله به یک نابرابر درست، تبدیل شود، مجموعه جواب نامعادله می گوییم و این مجموعه جواب را با حروف D نمایش می دهیم.

مجموعه جواب یک نامعادله را روی محور اعداد حقیقی می توان نشان داد.

حل نامعادله: می توان مانند حل معادله عمل کرد با این تفاوت در مرحله ی پایانی در صورتی که ضریب مجهول عددی منفی باشد هنگام تقسیم طرفین بر عدد منفی، جهت نامعادله تغییر می کند.

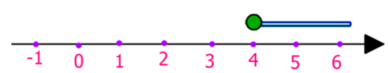
مثال: مجموعه جواب نامعادله زیر را به دست آورده و آن ها را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) $۲x + ۷ \geq ۱۵$

پاسخ: مانند حل معادله عمل می کنیم ابتدا نامعادله را مرتب می کنیم و معلوم ها در یک طرف نامساوی و مجهول ها در طرف دیگر قرار می دهیم و سپس ساده می کنیم و مقدار مجهول را به دست می آوریم.

$۲x \geq ۱۵ - ۷ \quad \Rightarrow ۲x \geq ۸ \quad \Rightarrow \quad x \geq ۴$

برای به دست آوردن مجموعه جواب (دامنه) می نویسیم «x» (متغیر) عضو «R» (اعداد حقیقی) به طوری که (|) $x \geq ۴$ (مقدار مجهولی که از حل نامعادله به دست می آوریم)



$D = \{x \in R \quad | \; x \geq ۴\}$

ب) $۲(x - ۳) + ۵ < ۵ - x \quad \Rightarrow \quad ۲x - ۶ + ۵ < ۵ - x \quad \Rightarrow \quad ۲x + x < ۵ + ۶ - ۵ \quad \Rightarrow ۳x < ۶ \Rightarrow x < ۲$

$D = \{x \in R \quad | \; x < ۲\}$

حل نامعادلات کسری:

برای کل نامعادله کوچکترین مخرج مشترک کسرها را در نظر می گیریم در معادلات به مخرج کسرها پس از مساوی شدن احتیاجی نداریم و مخرج ها را حذف می کنیم سپس نامعادله را طبق مراحل قبل حل می کنیم.

مثال: مجموعه جواب نامعادله های زیر را به دست آورده و آن ها را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) $- ۲ - \frac{q}{۴} \leq \frac{۱ + q}{۳}$

$\frac{-۲ \times ۱۲}{۱ \times ۱۲} - \frac{q \times ۳}{۴ \times ۳} \leq \frac{(۱ + q) \times ۴}{۳ \times ۴} \quad \Rightarrow -۲۴ - ۳q \leq ۴ + ۴q \quad \Rightarrow -۳q - ۴q \leq ۴ + ۲۴$

$\Rightarrow \; -۷q \leq ۲۸ \quad \Rightarrow \quad q \geq -۴$

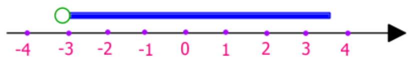
$D = \{q \in R \quad | \; q \geq ۴\}$

ابتدا مخرج مشترک ۱۲ را در نظر می گیریم و مخرج ها را حذف می کنیم و طبق مراحل نامعادله حل می کنیم برای به دست آوردن مقدار مجهول چون طرفین نامساوی را بر عدد منفی تقسیم می کنیم جهت نامساوی تغییر می کند.

ب) $\frac{x+۱}{۲}+۷>-۲x$

$$\frac{x+۱}{۲}+\frac{۷\times۲}{۱\times۲}>\frac{-۲x\times۲}{۱\times۲} \Rightarrow x+۱+۱۴>-۴x \Rightarrow x+۴x>-۱۵ \Rightarrow ۵x>-۱۵ \Rightarrow x>-۳$$

$D=\{x\in R \mid x>-۳\}$



نکته: علامت $\leq$ هرگز نباید به صورت کوچکتر و مساوی خوانده شود زیرا نمی توان تصور کرد که عدد x هم کوچکتر از y باشد و هم با آن مساوی باشد. بنابراین هنگام خواندن این نامساوی دقت کنید تا عبارت صحیح خوانده شود. این مورد برای علامت $\geq$ نیز صادق است و هرگز نباید به صورت بزرگتر و مساوی خوانده شود، بلکه باید به صورت بزرگتر یا مساوی گفته شود.

نکته: در مسائل مربوط به نابرابری ها به جای کلمه ی حداکثر از علامت $\leq$ و به جای کلمه حداقل از علامت $\geq$ استفاده می کنیم.

مثال: عبارت کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

اگر پول علی را سه برابر کنیم، حداقل ۳۰۰ تومان از دو برابر پولش بیشتر می شود؟

پول علی $=x$ $\qquad$ $۳x\geq ۳۰۰+۲x$

نکته: برای اینکه علامت یا نمادهای نامساوی و جهتشان را فراموش نکنید بهتر است از تصویر زیر کمک بگیرید.

$۲>۱$ $\qquad$ کوچک < بزرگ $\qquad$ $۲<۵$

مثال: علامت عددهای حقیقی a و b و c را طوری تعیین کنید که نابرابری زیر برقرار باشد.

الف) $\frac{a}{bc}>۰$

این کسر به شرطی مثبت است که حاصل ضرب علامت های آن مثبت شود یعنی تعداد منفی ها زوج باشد، بنابراین:

۱) $a>۰\ ,\ b>۰\ ,\ c>۰$ $\qquad$ ۲) $a<۰\ ,\ b<۰\ ,\ c>۰$

۳) $a>۰\ ,\ b<۰\ ,\ c<۰$ $\qquad$ ۴) $a<۰\ ,\ b>۰\ ,\ c<۰$

ب) $\frac{ac}{b^۲}<۰$

توان دوم هر عدد همواره مثبت است، بنابراین اگر یکی از عددهای صورت منفی باشد حاصل کسر منفی می شود.

۱) $a>۰\ ,c<۰\ ,\ b>۰$ $\qquad$ ۲) $a<۰\ ,c>۰\ ,b>۰$

۳) $a>۰\ ,b<۰\ ,c<۰$ $\qquad$ ۴) $a<۰\ ,b>۰\ ,c<۰$