



۱ نردبان به دیواری تکیه داده شده به طوریکه فاصله پای دیوار تا پای نردبان ۶ متر است. اگر نردبان از بالا ۲ متر پایین تر بیاید فاصله پای نردبان تا دیوار ۲ متر افزایش می یابد. بلندی نردبان کدام است؟

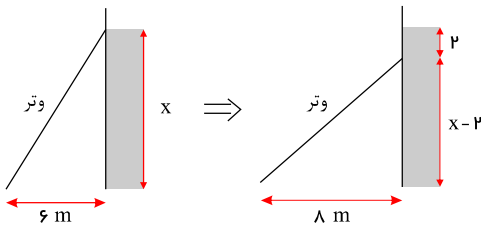
۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲



$$\text{وتر}^2 = x^2 + 36 \quad ; \quad \text{وتر}^2 = (x-2)^2 + 8^2$$

وتر طول نردبان و مقداری ثابت است.

$$x^2 + 36 = (x-2)^2 + 8^2$$

$$x^2 + 36 = x^2 + 4 - 4x + 64 \Rightarrow 36 = 68 - 4x$$

$$4x = 68 - 36 = 32 \Rightarrow 4x = 32 \Rightarrow x = 8$$

$$\text{وتر}^2 = x^2 + 36 = 8^2 + 36 = 64 + 36 = 100$$

$$\text{وتر} = \sqrt{100} = 10$$

۲ طول یک ساق مثلث متساوی الساقینی ۱۷ و قاعده آن ۱۴ است. مساحت مثلث کدام است؟

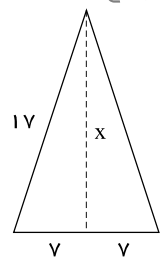
۱۵√۲ (۴)

۲۸√۱۵ (۳)

۳۵ (۲)

۷۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



$$x^2 = 17^2 - 7^2 = 289 - 49 = 240 \Rightarrow x = \sqrt{240}$$

$$\text{مساحت} = \frac{\sqrt{240} \times 14}{2} = 7 \times \sqrt{240} = 7 \times \sqrt{16 \times 15} = 28\sqrt{15}$$

۳ اگر در یک مثلث قائم الزاویه دارای محور تقارن، اندازه وتر ۶ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

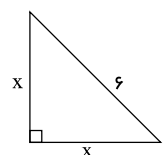
۱۰ (۴)

۸ (۳)

۹ (۲)

۷ ۱/۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ این مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است.



$$x^2 + x^2 = 6^2$$

$$2x^2 = 36$$

$$x^2 = 18$$

$$x = \sqrt{18}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\sqrt{18} \times \sqrt{18}}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

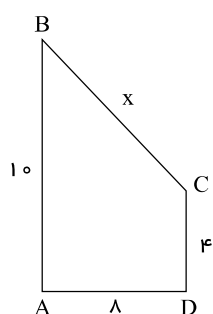
۴ باتوجه به شکل x کدام است؟

۲۰ (۱)

۱۲ (۲)

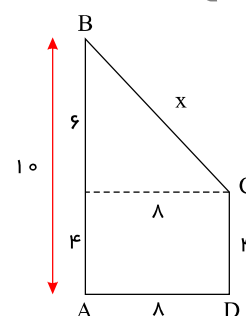
۱۶ (۳)

۱۰ (۴)



$$x^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow x = 10$$

پاسخ: گزینه ۴



۵ مربعی به محیط ۳۲ است. قطر مربع کدام است؟

۸ (۱)

 $\sqrt{128}$ (۲)

۱۶ (۳)

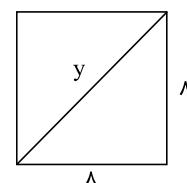
 $\sqrt{52}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$4 \times x = 32 \Rightarrow x = 8$$

$$\Rightarrow y^2 = 8^2 + 8^2 = 64 + 64$$

$$y^2 = 128 \Rightarrow y = \sqrt{128}$$

۶ اگر یک ضلع قائم مثلث قائم الزاویه ۳ برابر ضلع دیگر باشد و وتر آن مثلث $6\sqrt{10}$ باشد، محیط مثلث کدام است؟۱۲ + $6\sqrt{10}$ (۱) $6(4 + \sqrt{10})$ (۲) $8(2 + 3\sqrt{2})$ (۳) $6(4 + 2\sqrt{5})$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

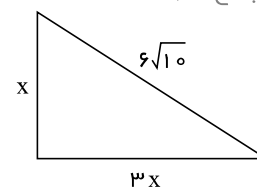
$$(6\sqrt{10})^2 = x^2 + (3x)^2$$

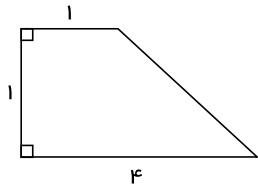
$$360 = x^2 + 9x^2 \Rightarrow 360 = 10x^2$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6$$

$$\Rightarrow \text{محیط} = 6 + 18 + 6\sqrt{10} = 24 + 6\sqrt{10} = 6(4 + \sqrt{10})$$





$$8 + 3\sqrt{2} \quad (2)$$

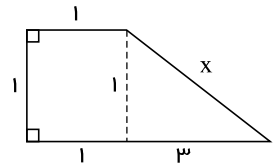
$$4 + 3\sqrt{6} \quad (4)$$

$$x^2 = 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{10}$$

$$\text{محیط} = 1 + 1 + \sqrt{10} + 4 = 6 + \sqrt{10}$$

پاسخ: گزینه ۱



۷

محیط دوزنقه زیر کدام است؟

$$6 + \sqrt{10} \quad (1)$$

$$12 \quad (3)$$

۸

در یک مثلث متساوی الساقین با یک زاویه 90° اندازه‌ی ضلع بزرگتر ۴ است. اندازه‌ی ساق کدام است؟

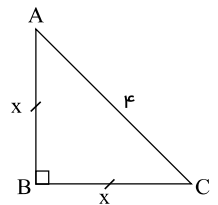
$$4\sqrt{2} \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

$$2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲



$$\Rightarrow x^2 + x^2 = 4^2$$

$$2x^2 = 16$$

$$x^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

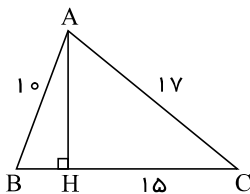
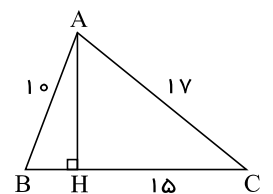
۹

مساحت شکل روبرو چقدر است؟

$$16 \quad (1)$$

$$84 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳



$$AH^2 = 17^2 - 15^2 \Rightarrow 289 - 225 = 64 \Rightarrow AH = 8$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$10^2 = 8^2 + BH^2 \Rightarrow BH = 6$$

$$\text{مساحت} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{8 \times (6 + 15)}{2} = \frac{8 \times 21}{2} = 84$$

۱۰

محیط مثلث متساوی الاضلاع ABC، ۱۲ است. اندازه‌ی ارتفاع AH چقدر است؟

$$2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$3\sqrt{2} \quad (3)$$

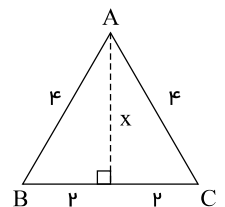
$$\sqrt{3} \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴ هر ضلع آن $4 = \frac{12}{3}$ می‌باشد.

$$x^2 + 2^2 = 4^2$$

$$x^2 + 4 = 16 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$



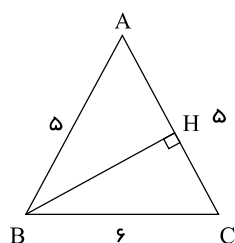
۱۱ مثلث ABC متساوی الساقین است. $(AB = AC)$ اندازه ارتفاع BH برابر است با:

۴٫۸ (۱)

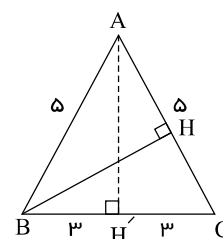
۲٫۴ (۲)

۴٫۲ (۳)

۳٫۶ (۴)



پاسخ: گزینه ۱



$$AH'^2 = 25 - 9 = 16$$

$$AH' = 4$$

$$\begin{aligned} \text{مساحت مثلث} &= \frac{AH' \times BC}{2} = \frac{BH \times AC}{2} \\ &= \frac{4 \times 6}{2} = \frac{BH \times 5}{2} \\ 12 &= \frac{5 \times BH}{2} \Rightarrow BH = \frac{24}{5} = 4.8 \end{aligned}$$

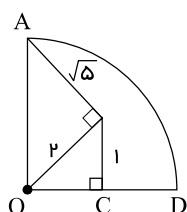
۱۲ اگر O مرکز مربع دایره باشد، باتوجه به شکل اندازه پاره خط CD کدام است؟

$\sqrt{5}$ (۱)

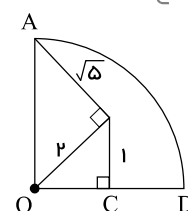
$3 - \sqrt{5}$ (۲)

۳ (۳)

$3 - \sqrt{3}$ (۴)



پاسخ: گزینه ۴



$$OA^2 = (\sqrt{5})^2 + 2^2 = 5 + 4 = 9 \rightarrow OA = 3$$

$$OC^2 + 1^2 = 2^2 \text{ شعاع دایره}$$

$$OC^2 + 1 = 4 \Rightarrow OC^2 = 3 \Rightarrow OC = \sqrt{3}$$

$$CD = OD - OC = 3 - \sqrt{3}$$

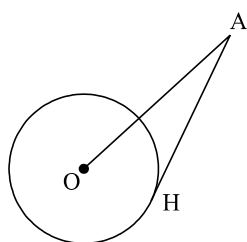
۱۳ در شکل زیر $OA = 5\sqrt{5}$ و شعاع دایره برابر ۵ است. طول مماس AH کدام است؟

۱۵ (۱)

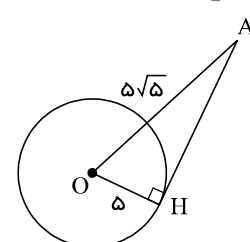
۲۰ (۲)

۵ (۳)

۱۰ (۴)



پاسخ: گزینه ۴



$$OA^2 = OH^2 + AH^2$$

$$(5\sqrt{5})^2 = 25 + AH^2$$

$$125 = 25 + AH^2 \Rightarrow AH^2 = 100 \Rightarrow AH = 10$$

۱۴ مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $10\sqrt{3}$ کدام است؟

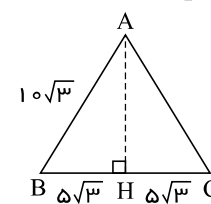
$45\sqrt{3}$ (۱)

$25\sqrt{3}$ (۲)

$75\sqrt{3}$ (۳)

$50\sqrt{3}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳



$$AH^2 + BH^2 = AB^2$$

$$AH^2 + (5\sqrt{3})^2 = (10\sqrt{3})^2 \Rightarrow AH^2 + 75 = 300$$

$$AH^2 = 225 \Rightarrow AH = 15$$

$$\text{مساحت} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{15 \times 10\sqrt{3}}{2} = 75\sqrt{3}$$

۱۵ اندازه‌ی اضلاع قائمه مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۵ و ۱۲ است. مقدار تقریبی ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

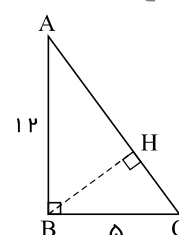
۴٫۱ (۴)

۴٫۶ (۳)

۵ (۲)

۵٫۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 12^2 + 5^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow AC = 13$$

$$AB \times BC = BH \times AC$$

$$\Rightarrow 12 \times 5 = BH \times 13 \Rightarrow BH = \frac{60}{13} = 4\frac{8}{13} = 4.61 \approx 4.6$$

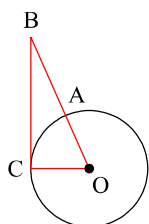
۱۶ در شکل زیر BC مماس بر دایره و OA = AB می‌باشد، اگر BC = ۶ در اینصورت محیط دایره برابر است با:

۳π (۲)

۲٫۵π (۴)

۴√۲π (۱)

۴√۳π (۳)



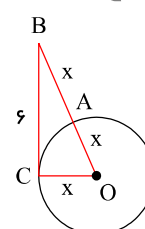
$$\Rightarrow OB^2 = OC^2 + CB^2$$

$$(2x)^2 = x^2 + BC^2 \Rightarrow 4x^2 = x^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = 6^2 = 36 = 3x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} \text{ شعاع}$$

$$\text{محیط دایره} = 2 \times \text{شعاع} \times \pi = 2 \times \sqrt{12} \times \pi = 4\sqrt{3}\pi$$

پاسخ: گزینه ۳

۱۷ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای $(\hat{B} = 90^\circ)$ ، $AC = 5$ و $AB = \frac{AC+1}{2}$ است. اندازه BC کدام است؟

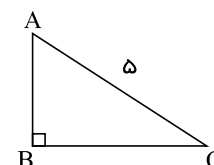
۴ (۴)

۵٫۹ (۳)

۵٫۲ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\begin{cases} 25 = AB^2 + BC^2 \\ AB = \frac{AC+1}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

$$25 = 3^2 + BC^2 \Rightarrow 25 - 9 = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{16} = 4$$

۱۸ مساحت مستطیل که طول آن ۱۲ و قطر آن ۱۳ باشد کدام است؟

۶۰ (۴)

۳۰ (۳)

۳۴ (۲)

۱۵۶ (۱)

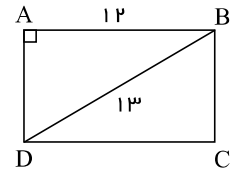
پاسخ: گزینه ۴

$$BD^2 = AD^2 + AB^2$$

$$13^2 = AD^2 + 12^2 \Rightarrow 169 = AD^2 + 144$$

$$AD^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow AD = 5$$

$$\text{مساحت: } AD \times AB = 5 \times 12 = 60$$



۱۹ طول قطر مستطیلی که عرض آن $\sqrt{5}$ و طول آن دو برابر عرض آن است برابر است با:

$$2\sqrt{5} \quad (4)$$

$$\sqrt{10} \quad (3)$$

$$15 \quad (2)$$

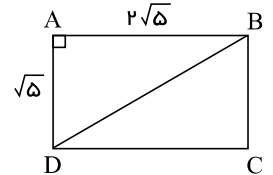
$$5 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$BD^2 = (2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 \Rightarrow BD^2 = 20 + 5 = 25$$

$$\Rightarrow BD = 5$$



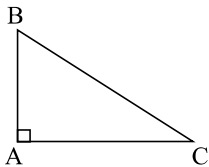
۲۰ در مثلث زیر (قائم الزاویه ABC و $\hat{A} = 90^\circ$) اگر $\hat{B} = 60^\circ$ و $AB = 5\text{ cm}$ باشد، اندازه AC برابر است با:

$$5\sqrt{5} \quad (2)$$

$$8,6 \quad (4)$$

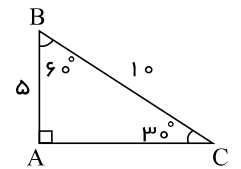
$$5\sqrt{3} \quad (1)$$

$$8,5 \quad (3)$$



$$AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow AC^2 + 5^2 = 10^2$$

$$\Rightarrow AC^2 + 25 = 100 \Rightarrow AC^2 = 100 - 25 = 75 \Rightarrow AC = 5\sqrt{3}$$

پاسخ: گزینه ۱ ضلع روبرو به 30° نصف وتره!

۲۱ محیط یک لوزی ۴۰ و قطر بزرگ آن ۱۶ است. مساحت لوزی کدام است؟

$$240 \quad (4)$$

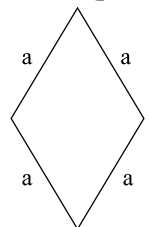
$$192 \quad (3)$$

$$320 \quad (2)$$

$$96 \quad (1)$$

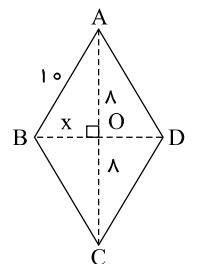
پاسخ: گزینه ۱

$$\text{محیط} = 4 \times a = 40 \Rightarrow a = 10$$



$$AB^2 = OB^2 + AO^2 \Rightarrow 10^2 = x^2 + 8^2 \Rightarrow x = 6$$

$$\text{مساحت} = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{16 \times 12}{2} = 96$$



۲۲ در شکل زیر مقدار x تا دو رقم اعشار کدام است؟

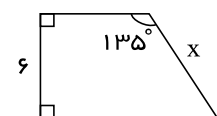
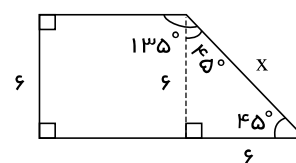
۱) ۸٫۴۸

۲) ۷٫۹۸

۳) ۸٫۴۹

۴) ۷٫۹۹

پاسخ: گزینه ۱

پس مثلثی متساوی الساقین و قائم الزاویه است: $x^2 = 6^2 + 6^2$

$$x^2 = 72 \Rightarrow x = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} = 8.48$$

۲۳ در شکل زیر طول AH کدام است؟

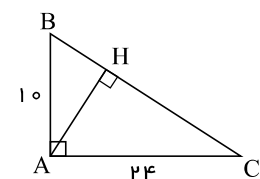
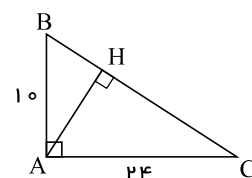
۱) ۱۰٫۳

۲) ۱۱٫۹

۳) ۹٫۲

۴) ۷٫۹

پاسخ: گزینه ۳



$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$10^2 + 24^2 = BC^2 \Rightarrow 100 + 576 = BC^2$$

$$BC^2 = 676 \Rightarrow BC = 26$$

$$AB \times AC = AH \times BC$$

$$10 \times 24 = AH \times 26 \Rightarrow AH = \frac{240}{26} = 9.2$$

۲۴ کدام دسته از اعداد زیر می توانند اضلاع یک مثلث قائم الزاویه باشند؟

۱) ۳، ۴، ۵

۲) ۶، ۶، ۶

۳) ۲، ۹، ۱۰

۴) ۱۵، ۱۱، ۱۱

پاسخ: گزینه ۱

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

۲۵ نقطه O مرکز دایره و $OABC$ یک مستطیل است. با توجه به اندازه های روی شکل طول EC کدام است؟

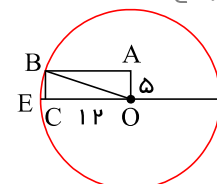
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۰٫۵

۴) ۰٫۲۵

پاسخ: گزینه ۱



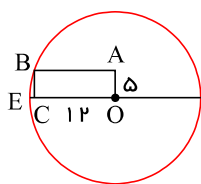
$$OB^2 = AO^2 + AB^2$$

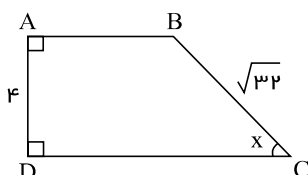
$$OB^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow OB^2 = 25 + 144$$

$$OB^2 = 169$$

$$OB = 13 \rightarrow \text{شعاع دایره}$$

$$EC = OE - OC = 13 - 12 = 1$$



۲۶ در ذوزنقه $ABCD$ مقدار x کدام است؟

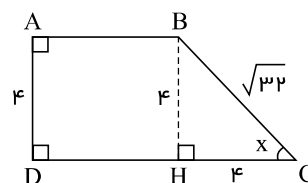
۳۰ (۱)

۴۵ (۲)

۶۰ (۳)

۷۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۲



$$BH^2 + CH^2 = BC^2$$

$$4^2 + CH^2 = (\sqrt{32})^2$$

$$16 + CH^2 = 32 \Rightarrow CH^2 = 16 \Rightarrow CH = 4$$

پس مثلث BHC متساوی الساقین و قائم الزاویه است پس: $x = 45^\circ$

۲۷ طول اضلاع مثلثی ۲ و ۳ و ۳ است. طول ارتفاع وارد بر قاعده چند سانتی متر است؟

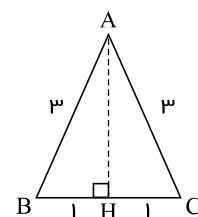
$$\frac{4\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (3)$$

$$\sqrt{3} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱ مثلث متساوی الساقین است.



$$AB^2 = BH^2 + AH^2$$

$$3^2 = 1^2 + AH^2 \Rightarrow 9 = 1 + AH^2 \Rightarrow AH^2 = 9 - 1 = 8$$

$$AH = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۲۸ کدام دسته از اعداد زیر سه ضلع مثلث قائم الزاویه اند؟

$$(10, 4, 6) \quad (1)$$

$$(10, 8, 5) \quad (2)$$

$$(6, 5, 4) \quad (3)$$

$$(\sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{2}) \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2 = \sqrt{5}^2$$

$$3 + 2 = 5 \Rightarrow 5 = 5$$

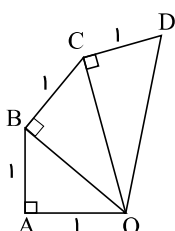
۲۹ محیط چندضلعی $OABCD$ در شکل مقابل، برابر با کدام است؟

$$4 \quad (1)$$

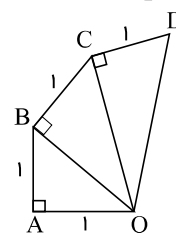
$$4\sqrt{2} \quad (2)$$

$$6 \quad (3)$$

$$5,5 \quad (4)$$



پاسخ: گزینه ۳



$$AB^2 + AO^2 = BO^2$$

$$1 + 1 = BO^2 \Rightarrow BO^2 = 2 \Rightarrow OB = \sqrt{2}$$

$$BC^2 + OB^2 \Rightarrow 1^2 + \sqrt{2}^2 = OC^2$$

$$1 + 2 = OC^2 \Rightarrow OC^2 = 3 \Rightarrow OC = \sqrt{3}$$

$$CD^2 + OC^2 = OD^2 \Rightarrow 1^2 + \sqrt{3}^2 = OD^2$$

$$1 + 3 = OD^2 \Rightarrow 4 = OD^2 \Rightarrow OD = 2$$

$$\text{محیط: } 1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 6$$

۳۰ اندازه میانه وارد بر وتر در یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین برابر $4\sqrt{2}$ است. اندازه هر ساق چقدر است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

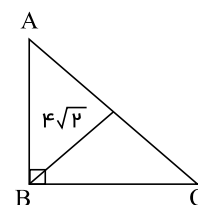
۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر برابر با نصف وتر است؛ داریم:

$$\Rightarrow AC = 2 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$\text{قضیه فیثاغورس: } AB^2 + BC^2 = (8\sqrt{2})^2$$

$$2 \times AB^2 = 128 \Rightarrow AB^2 = 64 \Rightarrow AB = 8$$



۳۱ مساحت لوزی که قطر بزرگ آن ۸cm و ضلع آن ۵cm است، کدام می باشد؟

هیچ کدام (۴)

۶۴ (۳)

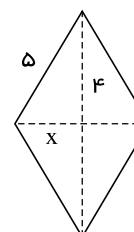
۴۸ (۲)

۲۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$x^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + 16 = 25 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{مساحت} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$$



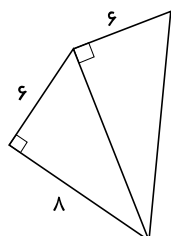
۳۲ مساحت شکل زیر کدام گزینه است؟

$$48 + 2\sqrt{136} \quad (1)$$

$$54 \quad (3)$$

$$36 \quad (2)$$

$$24 + 3\sqrt{136} \quad (4)$$

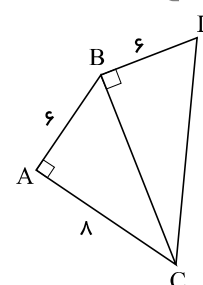


$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow 6^2 + 8^2 = BC^2 \Rightarrow 36 + 64 = BC^2$$

$$100 = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{100} = 10$$

پاسخ: گزینه ۳



$$\Rightarrow BD^2 + BC^2 = DC^2$$

$$136 = DC^2 \Rightarrow DC = \sqrt{136}$$

حال مساحت را بدست می آوریم:

$$\text{مساحت} = \frac{AB \times AC}{2} + \frac{BD \times BC}{2} = \frac{6 \times 8}{2} + \frac{6 \times 10}{2} = 24 + 30 = 54$$

۳۳ در مربعی به ضلع ۱۰ اندازه قطر برابر است با:

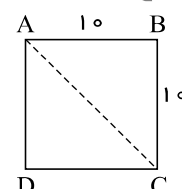
$$10 \quad (1)$$

$$\sqrt{50} \quad (2)$$

$$\sqrt{200} \quad (3)$$

$$\sqrt{150} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳



$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$10^2 + 10^2 = AC^2 \Rightarrow 100 + 100 = AC^2 \Rightarrow 200 = AC^2$$

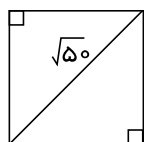
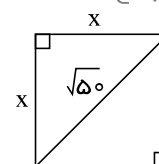
$$AC = \sqrt{200}$$

۳۴ محیط مربع در شکل مقابل چند سانتی متر است؟

$$25 \quad (1)$$

$$24 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲



$$20 \quad (2)$$

$$45 \quad (4)$$

$$x^2 + x^2 = (\sqrt{50})^2 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{محیط} = 4 \times 5 = 20$$

۳۵ اندازه وتر مثلث متساوی الساقین شکل مقابل کدام است؟

$$2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$6\sqrt{2} \quad (3)$$

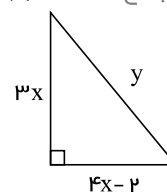
$$4\sqrt{2} \quad (2)$$

$$8\sqrt{2} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳ چون مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است پس اضلاع با هم برابر است.

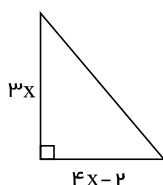
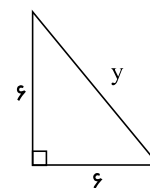
$$3x = 4x - 2 \Rightarrow 4x - 3x = 2$$

$$x = 2$$



$$y^2 = 6^2 + 6^2 \Rightarrow y^2 = 36 + 36 \Rightarrow y^2 = 72$$

$$y = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

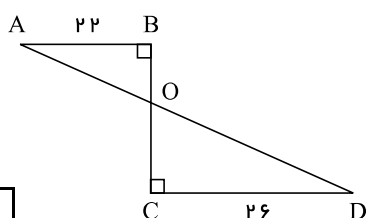
۳۶ در شکل زیر $BC = 20$ است. طول AD کدام است؟

$$47 \quad (1)$$

$$52 \quad (3)$$

$$50 \quad (2)$$

$$56 \quad (4)$$



۳۷

در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABC$ به اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳ مجموع مربعات طول میانه وارد بر وتر و میانه وارد بر کوچکترین ضلع را بیابید.

۱۹۲٫۵ (۴)

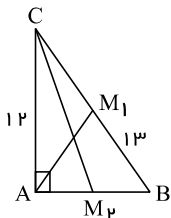
۱۹۲٫۲۵ (۳)

۱۵۰٫۲۵ (۲)

۴۲٫۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ می دانیم طول میانه وارد بر یک مثلث قائم الزاویه نصف وتر است، پس داریم:

$$AM_1 = \frac{13}{2} \rightarrow AM_1^2 = 42.25$$



$$AM_2 = \frac{5}{2} \text{ پس: } AM_2 = \frac{AB}{2}$$

طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$CM_2^2 = 12^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 150.25$$

$$\rightarrow AM_1^2 + CM_2^2 = 192.5$$

۳۸

در مثلث $\triangle ABC$ میانه نظیر رأس B و رأس C بر هم عمودند. BC^2 را بیابید در صورتی که:

$$\overline{CA} = \frac{2}{3} \overline{BA} = 6$$

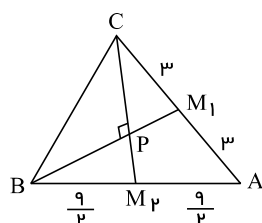
۱۱۷ (۴)

۱۱۷ (۳)

۱۱۷ (۲)

۱۱۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



$$\begin{cases} BM_1 = 3x \rightarrow \begin{cases} BP = 2x \\ PM_1 = x \end{cases} \\ CM_2 = 3y \rightarrow \begin{cases} CP = 2y \\ PM_2 = y \end{cases} \end{cases}$$

طبق قضیه فیثاغورس

$$\begin{cases} PM_1^2 + PC^2 = 3^2 \rightarrow x^2 + 4y^2 = 9 \\ PM_2^2 + PB^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 \rightarrow y^2 + 4x^2 = \frac{81}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9 \\ 4x^2 + y^2 = \frac{81}{4} \end{cases} \rightarrow 5x^2 + 5y^2 = \frac{117}{4}$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = \frac{117}{20} \quad (1)$$

از طرفی طبق قضیه فیثاغورس برای بدست آوردن $\overline{BC}$ داریم:

$$\overline{BC}^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه (1)}} \overline{BC}^2 = 4(x^2 + y^2) = 4\left(\frac{117}{20}\right) = \frac{117}{5}$$

۳۹

در مثلثی داریم: $\hat{A} = 30^\circ$ و $\hat{B} = 120^\circ$ و $AB = 4\text{cm}$ ، محیط این مثلث کدام است؟

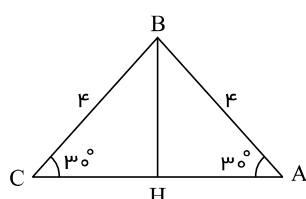
۴ + ۲√۳ (۴)

۶√۳ (۳)

۳ + ۶√۳ (۲)

۸ + ۴√۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ $\triangle ABC$ مثلث متساوی الساقین است پس داریم:



$$\overline{BH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 2$$

$$\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} = 2\sqrt{3} \rightarrow \overline{AC} = 2 \times \overline{AH} = 4\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \triangle ABC \text{ محیط: } 2 + 2 \times 4 + 4\sqrt{3} = 8 + 4\sqrt{3}$$

۴۰

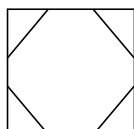
در شکل زیر مساحت مربع ۴ واحد مربع است، مساحت هشت ضلعی کدام است؟

۸(√۲ - ۱) (۴)

۴(√۲ - ۱) (۳)

۲(√۲ - ۲) (۲)

۴(√۲ - ۸) (۱)



پاسخ: گزینه ۴ نکته: اگر یک هشت ضلعی منتظم به ضلع x ، مانند شکل مقابل، روی محیط مربعی به ضلع a قرار گیرد، روابط زیر برقرار است:

$$S = 2x^2(1 + \sqrt{2})$$

$$S = 4 \rightarrow a = 2 \xrightarrow{\text{طبق نکته فوق}} x = (\sqrt{2} - 1) \times 2 = 2\sqrt{2} - 2 \quad (1)$$

طبق شکل رسم شده مساحت هر مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به وتر x می شود:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x \right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} x^2 = \frac{x^2}{4}$$

$$x \text{ ضلع } \Delta \text{ مساحت هشت ضلعی منتظم به ضلع } x = 4 \times S_{\text{مکعب کوچک}} = 4 - 4 \times \frac{x^2}{4} = 4 - x^2 \xrightarrow{(1)} 4 - (2(\sqrt{2} - 1))^2$$

$$= 4 - 4(\sqrt{2} - 1)^2 = 8\sqrt{2} - 8$$

۴۱ در یک لوزی یکی از قطرهای سه برابر دیگری است. اگر مساحت لوزی S باشد، طول ضلع لوزی بر حسب S کدام است؟

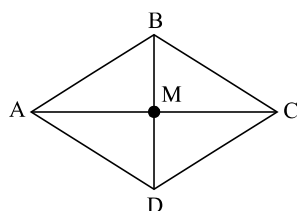
۳S (۴)

$\frac{\sqrt{15S}}{3}$ (۳)

۵S (۲)

$\sqrt{15S}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



$$\overline{AC} = 2\overline{BD}$$

$$S_{\text{لوزی}} = \frac{\text{قطر بزرگ} \times \text{قطر کوچک}}{2} = S$$

$$\rightarrow \frac{2\overline{BD} \times \overline{BD}}{2} = S \rightarrow \overline{BD}^2 = \frac{2S}{3}$$

$$\rightarrow \overline{BD} = \sqrt{\frac{2S}{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6S}}{3} \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{6S}$$

$$\Delta AMB \Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{AM}^2 = \left(\frac{\sqrt{6S}}{6} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6S}}{2} \right)^2 = \frac{S}{6} + \frac{3S}{2} = \frac{10S}{6} = \frac{5S}{3}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\frac{5S}{3}} = \frac{\sqrt{5S}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15S}}{3}$$

۴۲ نقطه O درون مربعی به ضلع k که از دو رأس مجاور مربع و ضلع مقابل آن ها که با آن دو رأس برخورد ندارد، به یک فاصله است

قرار دارد. اگر این فاصله مشترک d باشد، d کدام است؟

$\frac{3k}{5}$ (۴)

$\frac{3k}{8}$ (۳)

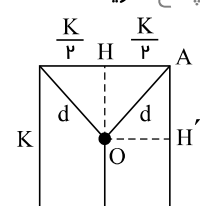
$\frac{5k}{8}$ (۲)

$5k$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned} \Delta OAH : d^2 &= OH^2 + \frac{k^2}{4} \\ \overline{OH} &= k - d \end{aligned} \right\} \rightarrow d^2 = (k - d)^2 + \frac{k^2}{4} \rightarrow$$

$$d^2 = k^2 + d^2 - 2kd + \frac{k^2}{4} \rightarrow \frac{5}{4}k^2 - 2kd = 0 \rightarrow d = \frac{5}{8}k$$



۴۳ در مثلث قائم الزاویه ای نسبت اضلاع زاویه قائمه $\frac{2}{3}$ است. اگر مساحت مثلث ۳۶ واحد سطح باشد، طول وتر کدام است؟

۳۹ (۴)

۱۲ (۳)

$\sqrt{39}$ (۲)

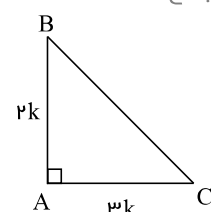
$2\sqrt{39}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

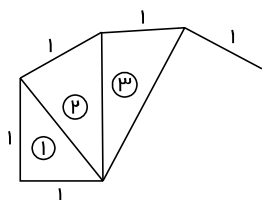
$$\hat{A} = 90^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{2}{3} = \frac{2 \times k}{3 \times k} \rightarrow S = \frac{2k \times 3k}{2} = 36 \rightarrow k^2 = 12 \rightarrow k = 2\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \overline{AB} = 4\sqrt{3} \quad \overline{AC} = 6\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 16 \times 3 + 36 \times 3 = 156 \rightarrow \overline{BC} = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}$$



۴۴ در شکل زیر طول وتر مثلث n ام کدام است؟



- ☐ ۲ $\sqrt{n}$
☐ ۴ $n + 1$

- ☐ ۱ $\sqrt{n+1}$
☐ ۳ $1 + \sqrt{n}$

پاسخ: گزینه ۱ طول وترها در مثلث‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) ... به ترتیب برابر است با $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$ و ... پس می‌توان نتیجه گرفت وتر مثلث n ام می‌شود: $\sqrt{n+1}$

۴۵ یک مثلث زاویه‌های 30° و 45° دارد. اگر طول ضلع روبه‌رو زاویه 45° درجه برابر ۱۲ باشد، طول ضلع روبه‌رو زاویه 30° کدام است؟

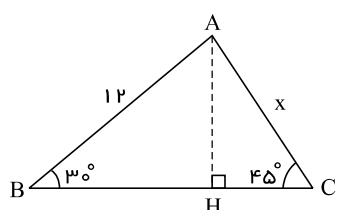
- ☐ ۴ ۶

- ☐ ۳ $6\sqrt{2}$

- ☐ ۲ $4\sqrt{2}$

- ☐ ۱ $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۳

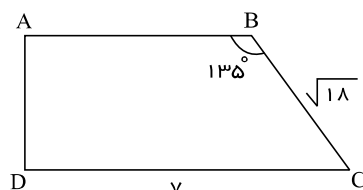


$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \times 12 = 6 = \overline{HC}$$

$$\triangle AHC : \overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2$$

$$\rightarrow x^2 = 36 + 36 = 72 \rightarrow x = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

۴۶ مساحت دوزنقه زیر کدام است؟



- ☐ ۲ $\sqrt{18}$

- ☐ ۴ $16,5$

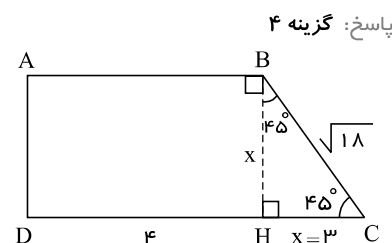
- ☐ ۱ ۹

- ☐ ۳ ۱۷

$$\triangle BHC : x^2 + x^2 = (\sqrt{18})^2 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x = 3$$

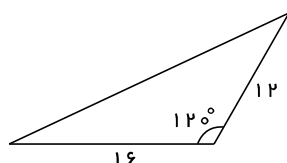
$$\overline{DH} = 7 - 3 = 4 = \overline{AB}$$

$$\rightarrow S_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \times BH}{2} = \frac{(4 + 7) \times 3}{2} = \frac{33}{2} = 16,5$$



پاسخ: گزینه ۴

۴۷ مساحت شکل مقابل را بیابید.



- ☐ ۲ $24\sqrt{3}$

- ☐ ۴ $32\sqrt{3}$

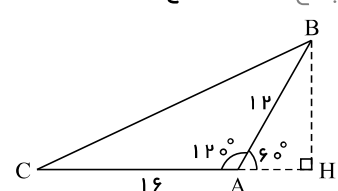
- ☐ ۱ $48\sqrt{3}$

- ☐ ۳ $16\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۱ ضلع AC را امتداد داده و از B بر آن عمود رسم می‌کنیم.

$$\triangle ABH : \overline{BH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{BA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ABC} : \frac{\overline{BH} \times \overline{AC}}{2} = \frac{6\sqrt{3} \times 16}{2} = 48\sqrt{3}$$



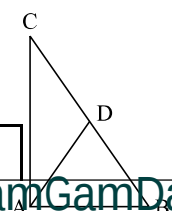
۴۸ در مثلث قائم‌الزاویه ABC زیر، مثلث ABD متساوی‌الضلاع است. اگر $\overline{AC} = 8$ باشد. طول BC کدام گزینه می‌باشد؟

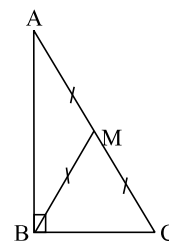
- ☐ ۲ $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

- ☐ ۴ $4\sqrt{3}$

- ☐ ۱ $16\sqrt{3}$

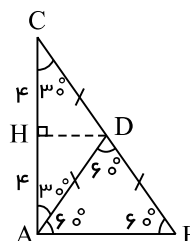
- ☐ ۳ $8\sqrt{3}$



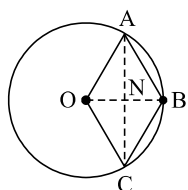


از D به AC عمود می‌کنیم با توجه به نکته فوق داریم:

$$\begin{aligned} \triangle DHC &= \triangle HBC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times DC \rightarrow 4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times DC \\ \rightarrow DC &= \frac{8}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \\ \rightarrow BC &= 2 \times DC = 2 \times \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$



۴۹ در شکل مقابل O مرکز دایره و $OABC$ لوزی است. اندازه AN بر حسب شعاع دایره (R) کدام است؟



$$\sqrt{3}R \quad (2)$$

$$R \quad (4)$$

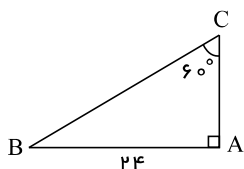
$$\frac{\sqrt{3}}{2}R \quad (1)$$

$$2R \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱ در لوزی چهار ضلع با هم برابرند. پس مثلث‌های OAB و OBC متساوی‌الاضلاع به ضلع R هستند. داریم:

$$\overline{AN} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times R$$

۵۰ در شکل زیر $\hat{C} = 60^\circ$ و $\overline{AB} = 24$ است. محیط مثلث کدام است؟



$$24(1 + \sqrt{3}) \quad (2)$$

$$6 + 3\sqrt{3} \quad (4)$$

$$12 + 2\sqrt{3} \quad (1)$$

$$12(1 + \sqrt{3}) \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲ ضلع روبرو به زاویه 60° ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است:

$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{BC} \rightarrow 24 = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{BC}$$

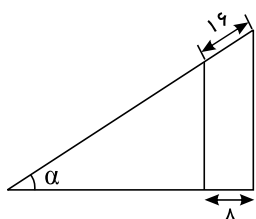
$$\rightarrow \overline{BC} = \frac{48}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{48\sqrt{3}}{3} = 16\sqrt{3}$$

$$\overline{AC} = \frac{1}{2} \overline{BC} \rightarrow \overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

$$\text{محیط } \triangle ABC = 16\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 24 = 24 + 24\sqrt{3} = 24(1 + \sqrt{3})$$

ضلع روبرو به زاویه 30° ، $\frac{1}{2}$ وتر است:

۵۱ در شکل زیر اندازه زاویه α کدام است؟



$$45^\circ \quad (2)$$

$$75^\circ \quad (4)$$

$$30^\circ \quad (1)$$

$$60^\circ \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳ نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع مقابل به زاویه 30° نصف وتر و همچنین در این مثلث، اندازه ضلع مقابل به زاویه 60° «وتر $\times \frac{\sqrt{3}}{2}$ » است.

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، ضلع روبرو به زاویه B نصف وتر است پس $B = 30^\circ$ و با توجه به خاصیت خطوط موازی و

مورب $\hat{A} = \hat{\alpha} = 60^\circ$ است.

۵۲ دو اتومبیل در ساعت $۱۵' : ۳$ بعد از ظهر از یک نقطه راه افتادند. اولی با سرعت ۴۰ کیلومتر بر ساعت به شمال رفت و دومی با سرعت ۳۰ کیلومتر بر ساعت به شرق. در چه زمانی فاصله دو اتومبیل ۲۰۰ کیلومتر است؟

$$۸ : ۱۵' \quad \boxed{۴}$$

$$۷ : ۱۵' \quad \boxed{۳}$$

$$۶ : ۱۵' \quad \boxed{۲}$$

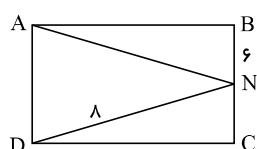
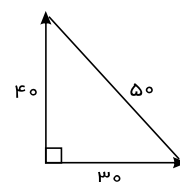
$$۵ : ۱۵' \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ اگر پس از مدت زمان m ساعت، اتومبیل اول $۴۰ \times m$ کیلومتر به سمت شمال و اتومبیل دوم $۳۰ \times m$ کیلومتر به سمت شرق حرکت کرده باشد پس در m ساعت فاصله بین دو اتومبیل می‌شود:

$$\sqrt{(۴۰ \times m)^2 + (۳۰ \times m)^2} = \sqrt{۲۵۰۰m^2} = ۵۰m$$

$$۵۰m = ۲۰۰ \rightarrow m = ۴ \quad \text{ساعت}$$

$$(۳, ۱۵') + (۴) = ۷ : ۱۵'$$



۵۳ در مستطیل مقابل $۴NC = ۳AN$ است. اندازه NC کدام است؟

$$۴ \quad \boxed{۲}$$

$$۴,۸ \quad \boxed{۱}$$

$$۶ \quad \boxed{۴}$$

$$۱۰ \quad \boxed{۳}$$

پاسخ: گزینه ۴ از فرض مسئله نتیجه می‌شود که: $AN = \frac{۴}{۳}NC$. در مثلث ANC داریم:

$$DC^2 = ۶۴ - NC^2, DC = AB \rightarrow AB^2 = ۶۴ - NC^2$$

در مثلث ANB داریم:

$$AN^2 = AB^2 + BN^2 \rightarrow AN^2 = (۶۴ - NC^2) + ۳۶ \rightarrow \frac{۱۶}{۹}NC^2 = ۱۰۰ - NC^2$$

$$\rightarrow \frac{۲۵}{۹}NC^2 = ۱۰۰ \rightarrow NC^2 = \frac{۱۰۰ \times ۹}{۲۵} \rightarrow NC = \frac{۱۰ \times ۳}{۵} = \frac{۳۰}{۵} = ۶$$

۵۴ مجموع مربعات دو قطر متوازی الاضلاع به ضلع‌های ۶ و ۱۲ کدام است؟

$$۲۷۰ \quad \boxed{۴}$$

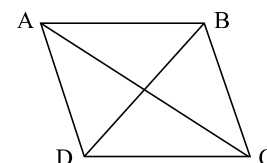
$$۲۷۲ \quad \boxed{۳}$$

$$۱۸۰ \quad \boxed{۲}$$

$$۳۶۰ \quad \boxed{۱}$$

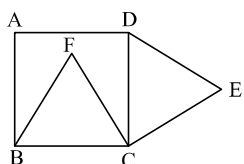
پاسخ: گزینه ۱ نکته: در هر متوازی الاضلاع، همواره مجموع مربع دو قطر با دو برابر مجموع مربعات دو ضلع آن برابر است:

$$AC^2 + BD^2 = ۲ \times (AB^2 + BC^2)$$



طبق نکته فوق داریم:

$$۲ \times (۱۲^2 + ۶^2) = ۲ \times (۱۴۴ + ۳۶) = ۲ \times ۱۸۰ = ۳۶۰$$



۵۵ $ABCD$ مربعی به ضلع ۲ است و BCF و CED دو مثلث متساوی الاضلاع اند. طول FE کدام است؟

$$۲\sqrt{۲} \quad \boxed{۲}$$

$$\sqrt{۲} \quad \boxed{۱}$$

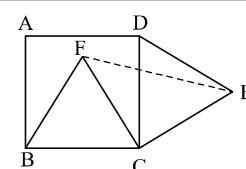
$$۴ \quad \boxed{۴}$$

$$۲ \quad \boxed{۳}$$

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به شکل داریم:

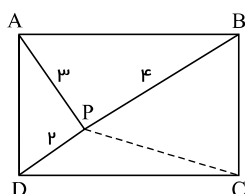
$$\left. \begin{aligned} \hat{ECF} &= \hat{ECD} + \hat{DCF} \\ \hat{DCF} &= ۹۰^\circ - \hat{FCB} = ۹۰^\circ - ۶۰^\circ = ۳۰^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{ECF} = ۶۰^\circ + ۳۰^\circ = ۹۰^\circ$$



پس مثلث ECF در رأس C قائم‌الزاویه است. پس داریم:

$$\overline{EF} = \sqrt{\overline{EC}^2 + \overline{CF}^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

۵۶ در شکل مقابل نقطه P درون مستطیل $ABCD$ قرار دارد. با توجه به اندازه‌های داده شده طول PC را بیابید.



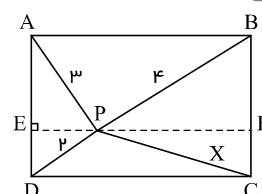
$$\sqrt{11} \quad (2)$$

$$4 \quad (4)$$

$$\sqrt{10} \quad (1)$$

$$\sqrt{12} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲ روش اول:



$$\left. \begin{aligned} \triangle PEA : \overline{PE} &= \overline{PA} - \overline{EA} = 3 - \overline{EA} \\ \triangle PED : \overline{PE} &= \overline{PD} - \overline{ED} = 4 - \overline{ED} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3 - \overline{EA} = 4 - \overline{ED} \rightarrow 5 - \overline{EA} = -\overline{ED} \quad (1) \quad \text{رابطه}$$

$$\left. \begin{aligned} \triangle PBF : \overline{PF} &= \overline{PB} - \overline{BF} = 4 - \overline{BF}, \quad \overline{AE} = \overline{BF} \rightarrow \overline{PF} = 4 - \overline{AE} \\ \triangle PFC : \overline{PF} &= \overline{PC} - \overline{CF} = x - \overline{CF}, \quad \overline{CF} = \overline{DE} \rightarrow \overline{PF} = x - \overline{DE} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

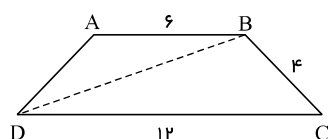
$$4 - \overline{AE} = x - \overline{DE} \xrightarrow{(1)} 4 - \overline{AE} = x + 5 - \overline{AE} \rightarrow x = 11 \rightarrow x = \sqrt{11}$$

روش دوم: نکته: برای هر نقطه دلخواه مانند P در مستطیل $ABCD$ همواره داریم:

$$\overline{PA} + \overline{PC} = \overline{PB} + \overline{PD}$$

با استفاده از فرمول فوق داریم:

$$3 + x = 4 + 2 \rightarrow 9 + x = 16 + 4 \rightarrow x = \sqrt{11}$$



۵۷ در شکل زیر $ABCD$ دوزنقه متساوی‌الساقین است، مساحت مثلث ABD را بیابید.

$$\frac{3}{2}\sqrt{7} \quad (2)$$

$$12 \quad (4)$$

$$3\sqrt{7} \quad (1)$$

$$\sqrt{7} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱ دو مثلث $BH'C$ و $AH'D$ به حالت وتر و یک زاویه تند، هم‌نهشتند. بنابراین $\overline{HC} = \overline{DH'}$.

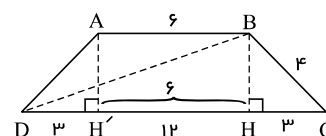
$$\overline{DC} - \overline{HH'} = \overline{DH'} + \overline{HC} = 2\overline{DH'}$$

$$12 - 6 = 2\overline{DH'} \rightarrow \overline{DH'} = \overline{HC} = 3$$

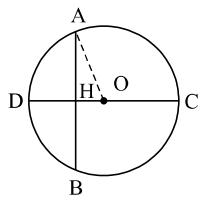
طبق رابطه فیثاغورس:

$$\overline{BH} = \overline{BC} - \overline{HC} \rightarrow \overline{BH} = 4 - 3 = 1 \rightarrow \overline{BH} = \sqrt{7}$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{\overline{AH'} \times \overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{7} \times 6}{2} = 3\sqrt{7}$$



۵۸ در شکل زیر اگر $\overline{CH} = ۱۰\text{cm}$ و $DH = ۶\text{cm}$ باشد، طول AB را بیابید. (O مرکز دایره بوده و $\hat{H} = ۹۰^\circ$ است).



$$۲\sqrt{۱۵} \quad (۲)$$

$$\sqrt{۱۵} \quad (۱)$$

$$۸ \quad (۴)$$

$$۴\sqrt{۱۵} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳ نکته: اگر قطر یا شعاعی از دایره بر وتر دایره عمود باشد، عمودمنصف نیز هست.

طبق نکته ذکر شده $\overline{AH} = \overline{BH}$ است. از طرفی $\overline{DC} = \overline{DH} + \overline{CH}$ می باشد. که داریم:

$$\overline{DC} = ۱۰ + ۶ = ۱۶ \rightarrow \overline{CO} = ۱۶ \div ۲ = ۸ \rightarrow \overline{OH} = \overline{OD} - \overline{HD} = ۸ - ۶ = ۲\text{cm}$$

$$R^2 = \overline{OA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2 \rightarrow ۶۴ = \overline{AH}^2 + ۴ \rightarrow \overline{AH} = \sqrt{۶۰} = ۲\sqrt{۱۵}$$

$$\rightarrow \overline{AB} = ۲ \times \overline{AH} = ۲ \times ۲\sqrt{۱۵} = ۴\sqrt{۱۵}$$

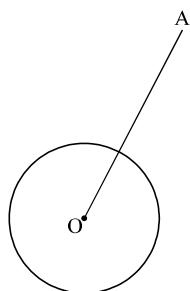
۵۹ در شکل زیر $\overline{OA} = ۱۰$ و شعاع دایره ۶ است. طول خط مماس بر دایره از نقطه A برابر است با:

$$۶ \quad (۲)$$

$$۸ \quad (۱)$$

$$۸\sqrt{۲} \quad (۴)$$

$$۱۰ \quad (۳)$$



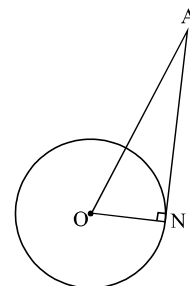
پاسخ: گزینه ۱ نکته: خط مماس به خطی گفته می شود که فقط یک نقطه برخورد با دایره دارد.

نکته: شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

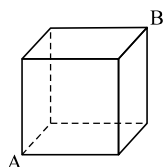
مثلاً $\angle ONA$ قائم الزاویه است، O مرکز دایره و N نقطه تماس خط با دایره است.

$$\overline{AO}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{AN}^2$$

$$\overline{AN} = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{ON}^2} = \sqrt{۱۰۰ - ۳۶} = \sqrt{۶۴} = ۸$$



۶۰ مکعبی به طول ضلع ۲ واحد مفروض است. اگر بخواهیم با گذشتن از روی وجه های مکعب از نقطه A به B برویم. طول کوتاه ترین مسیر آن کدام است؟



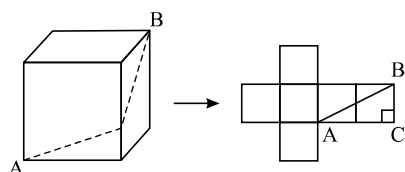
$$۴\sqrt{۵} \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

$$۲\sqrt{۵} \quad (۴)$$

$$\sqrt{۵} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا گسترده مکعب را رسم می کنیم پاره خطی که مستقیماً A را به B وصل می کند کوتاه ترین مسیر است.



$$\triangle ABC : \overline{AB} : \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{۴^2 + ۲^2} = \sqrt{۱۶ + ۴} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

۶۱ طول اضلاع یک مثلث ۲۵۰، ۲۴۰ و ۷۰ است. اگر ارتفاع وارد بر ضلعی که طول آن ۲۵۰ است را رسم کنیم، طول پاره خط کوچکتر که روی این ضلع جدا می شود کدام است؟

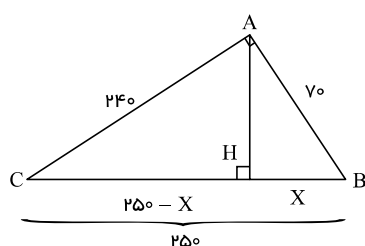
۱۹۶ (۱)

۱۹ (۲)

۱۹٫۶ (۳)

۱٫۹ (۴)

پاسخ: گزینه ۳



$$\left. \begin{aligned} \triangle ABH : \overline{AH}^2 &= 70^2 - x^2 \\ \overline{AH}^2 &= 240^2 - (250 - x)^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow 70^2 - x^2 = 240^2 - (250 - x)^2$$

$$\rightarrow 4900 - x^2 = 57600 - x^2 + 500x - 62500$$

$$4900 = 57600 + 500x - 62500 \rightarrow 98 = 5x \rightarrow x = \frac{98}{5} = 19.6$$

۶۲ در یک مثلث قائم الزاویه طول وتر $\sqrt{5}$ و طول یکی از اضلاع برابر ۱ است. اندازه مساحت مثلث چند برابر اندازه ضلع دیگر است؟

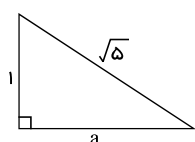
 $\frac{1}{2}$ (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

 $\sqrt{3}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۱



$$1^2 + a^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$a^2 = 5 - 1$$

$$a^2 = 4$$

$$a = 2$$

$$\text{نسبت مساحت مثلث به اندازه ضلع دیگر} : \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

نسبت مساحت مثلث به اندازه ضلع دیگر : $\frac{1}{2}$

۶۳ شکل زیر مستطیلی را نشان می دهد که با چهار ضلع ساخته شده، هر ضلع مربع ۱ واحد است و قطر مستطیل است که سه ضلع مربع را در M، L و K قطع کرده است. اندازه KM کدام است؟

 $\sqrt{17}$ (۱) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ (۲)

۲ (۳)

 $\sqrt{\frac{17}{2}}$ (۴)پاسخ: گزینه ۲ مشخص است که $\overline{KM} = \frac{2}{4} \overline{AC}$ است داریم:

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 1} = \sqrt{17}$$

$$KM = \frac{2}{4} AC = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

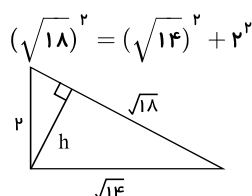
۶۴ در مثلثی به طول اضلاع ۲، $\sqrt{14}$ و $\sqrt{18}$ طول کوتاه ترین ارتفاع را بیابید.

 $\sqrt{14}$ (۱)

۲ (۲)

 $\frac{\sqrt{252}}{9}$ (۳) $\frac{2\sqrt{18}}{\sqrt{14}}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ مثلث با این اضلاع یک مثلث قائم الزاویه است زیرا:



$$(\sqrt{18})^2 = (\sqrt{14})^2 + 2^2$$

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه حاصل ضرب اضلاع قائم برابر وتر در ارتفاع وارد بر آن می‌باشد:

$$S = \frac{1}{2} \times \sqrt{18} \times h, \quad S = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{14} \Rightarrow \sqrt{18} \times h = 2 \times \sqrt{14}$$

$$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{14} \times 2}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{18}} \times \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{252}}{9}$$

۶۵ یک نردبان به طول ۲۰ متر بر دیواری تکیه داده شده، فاصله پایه نردبان از پی دیوار ۱۶ متر است. اگر بالای نردبان ۲ متر سر بخورد، سپس فاصله پایه نردبان تا دیوار، برابر است با:

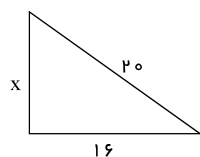
۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۱۰ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ قبل از اینکه نردبان سر بخورد داریم:



$$(20)^2 = x^2 + 16^2$$

$$x^2 = 400 - 256 = 144 \Rightarrow x = 12$$

بعد از اینکه نردبان سر خورد مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر ۲۰ (طول نردبان ثابت است) و ضلع قائم ۱۰ متر (۱۰ متر - ۲ متر) داریم. پس در این صورت طبق رابطه فیثاغورس فاصله پای نردبان تا دیوار برابر است با:

$$(20)^2 = (10)^2 + y^2 \rightarrow 400 - 100 = y^2 \rightarrow y^2 = 300 \rightarrow y = 10\sqrt{3}$$

۶۶ قطر مربعی $\sqrt{32}$ است، اندازه ضلع مربع کدام است؟

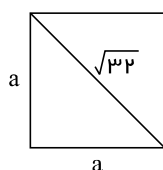
۱۶ (۴)

۲ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ نکته: اگر مربع را a در نظر بگیریم قطر مربع $a\sqrt{2}$ خواهد بود.



$$a^2 + a^2 = (\sqrt{32})^2$$

$$2a^2 = 32$$

$$a^2 = \frac{32}{2} = 16$$

$$a = 4$$

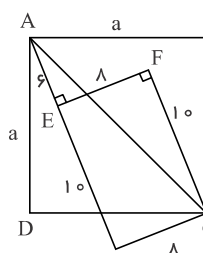
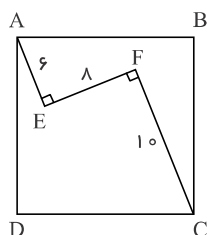
۶۷ طول ضلع مربع زیر چند است؟

۱۰ (۱)

۴ (۳)

۸ (۲)

۴۰ (۴)



$$AC^2 = 16^2 + 8^2 = 256 + 64 = 320$$

$$\rightarrow a^2 + a^2 = AC^2$$

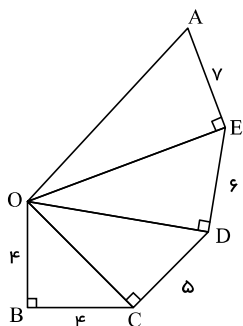
$$2a^2 = AC^2$$

$$2a^2 = 320$$

$$a^2 = 160$$

$$a = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

پاسخ: گزینه ۳ به کمک قطر مربع و امتداد پاره خط AE داریم:

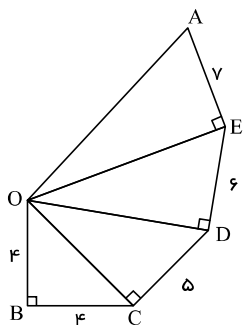
۶۸ در شکل مقابل طول پاره خط OA را بیابید.

- ۱ 7
 ۲ $\sqrt{148}$
 ۳ $\sqrt{93}$
 ۴ $\sqrt{142}$

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به رابطه فیثاغورس طول هر ضلع مثلث را حساب می‌کنیم:

$$\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}, \quad \sqrt{(\sqrt{32})^2 + 5^2} = \sqrt{57}, \quad \sqrt{(\sqrt{57})^2 + 6^2} = \sqrt{93}$$

$$\sqrt{(\sqrt{93})^2 + 7^2} = \sqrt{93 + 49} = \sqrt{142} \quad \text{طول پاره خط } OA$$

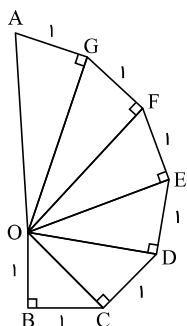


۶۹ رضا از شهر A به شهر B رفت. او از شهر A شروع کرد؛ $12km$ به شمال رفت، $8km$ به شرق، $13km$ به شمال، $7km$ به شرق، $15km$ به جنوب، $10km$ به غرب، $4km$ به جنوب و بالاخره $3km$ به شرق و به این ترتیب به شهر B رسید. فاصله مستقیم دو شهر A و B چند کیلومتر است؟

- ۱ $10\sqrt{2}$ ۲ 10 ۳ 0 ۴ 1

پاسخ: گزینه ۲ رضا در کل $6 = 15 - 10 + 13 - 8 + 7 - 3$ به سمت شمال و $8 = 8 + 7 - 10 + 3 = 8$ به سمت شرق رفته است. پس با توجه به رابطه فیثاغورس داریم:

$$B \text{ و } A \text{ فاصله دو شهر} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10km$$

۷۰ در شکل مقابل طول پاره خط OA کدام گزینه می‌باشد؟

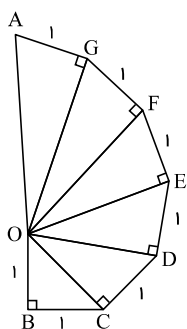
- ۱ 2
 ۲ $\sqrt{5}$
 ۳ $\sqrt{6}$
 ۴ $\sqrt{7}$

پاسخ: گزینه ۴ با نوشتن رابطه فیثاغورس در هر مثلث قائم‌الزاویه (با شروع از کوچک‌ترین مثلث) طول اضلاع را محاسبه می‌کنیم.

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ طول } OC, \quad \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3} \text{ طول } OD, \quad \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ طول } OE$$

$$\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ طول } OF, \quad \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{6} \text{ طول } OG, \quad \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 1^2} = \sqrt{7} \text{ طول } OA$$

نکته: به این شکل حلزونی فیثاغورس نیز می‌گویند.



۷۱ نقاط $A(2, 5)$, $B(1, 4)$ و $C(4, 3)$ رؤوس چه نوع مثلثی هستند؟

- ۱) قائم الزاویه ۲) متساوی الساقین ۳) غیر مشخص ۴) متساوی الاضلاع

پاسخ: گزینه ۱ نکته: فاصله هر دو نقطه مانند $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ در دستگاه مختصات برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

طبق نکته گفته شده ابتدا با استفاده از نقاط داده شده طول اضلاع مثلث را بدست می آوریم:

$$|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$|AC| = \sqrt{(2-4)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$|BC| = \sqrt{(1-4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

در مثلث ABC داریم:

$$(\sqrt{10})^2 = (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{2})^2$$

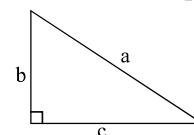
که نتیجه می شود مثلث ABC قائم الزاویه است.

۷۲ کدام یک از گزینه های زیر می تواند اضلاع یک مثلث قائم الزاویه باشد؟

- ۱) ۱, ۲, ۳ ۲) ۳, ۵, ۵ ۳) ۶, ۸, ۱۰ ۴) ۳, ۴, ۴

پاسخ: گزینه ۳ نکته: رابطه فیثاغورس: در هر مثلث قائم الزاویه، مجذور وتر با مجموع مجذورهای دو ضلع قائم مثلث برابر است:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



به اعداد a , b و c که می توانند ضلع های مثلث قائم الزاویه باشند، اعداد فیثاغورسی گفته می شود.

با توجه به نکته گفته شده فقط در گزینه ۳ داریم:

$$10^2 = 6^2 + 8^2$$

پس ۶, ۸ و ۱۰ اضلاع یک مثلث قائم الزاویه هستند.

۷۳ کدام دسته از اعداد فیثاغورسی اند؟

- ۱) ۱۵ و ۱۳ و ۱۲ ۲) ۹ و ۱۲ و ۱۴ ۳) ۸ و ۱۱ و ۱۳ ۴) ۹ و ۱۲ و ۱۵

پاسخ: گزینه ۴ بررسی گزینه های

گزینه ۱:

$$12^2 + 13^2 \stackrel{?}{=} 15^2$$

$$144 + 169 \stackrel{?}{=} 225$$

$$313 \neq 225 \quad \times$$

گزینه ۲:

$$9^2 + 12^2 \stackrel{?}{=} 14^2$$

$$81 + 144 \stackrel{?}{=} 196$$

$$225 \neq 196 \quad \times$$

گزینه ۳:

$$8^2 + 11^2 \stackrel{?}{=} 13^2$$

$$64 + 121 \stackrel{?}{=} 169$$

$$185 \neq 169 \quad \times$$

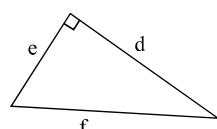
گزینه ۴:

$$9^2 + 12^2 \stackrel{?}{=} 15^2$$

$$81 + 144 \stackrel{?}{=} 225$$

$$225 = 225$$

۷۴ در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو کدام رابطه درست است؟



$$f^2 = d^2 - e^2 \quad (2)$$

$$f^2 = d^2 + e^2 \quad (4)$$

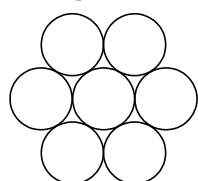
$$d^2 = e^2 + f^2 \quad (1)$$

$$e^2 = f^2 + d^2 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴ نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، بزرگترین ضلع را وتر گوئیم. (وتر، ضلع روبه‌رو زاویه قائمه می‌باشد.) و اندازه وتر به توان ۲، برابر مجموع مربعات دو ضلع قائمه است.

$$f^2 = e^2 + d^2$$

۷۵ شعاع هر ۷ دایره کوچک در شکل مقابل برابر ۱ است. دایره بزرگ از نقطه‌های مماس شدن دایره‌های کوچک می‌گذرد. شعاع دایره بزرگ چقدر است؟



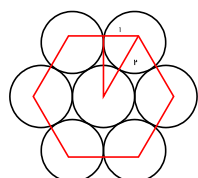
$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{3} \quad (4)$$

$$2 \quad (1)$$

$$\sqrt{5} \quad (3)$$

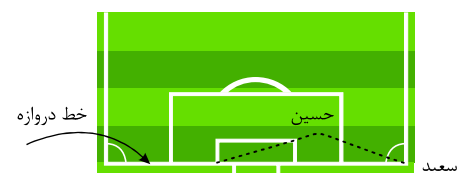
پاسخ: گزینه ۴ از متصل کردن مراکز دایره‌های بیرونی یک ۶ ضلعی منتظم به دست می‌آید که فاصله مرکز شش ضلعی از هر کدام از رؤس آن برابر با ۲ سانتی‌متر است. کافی است فاصله مرکز تا یکی از اضلاع ۶ ضلعی را محاسبه کنیم. در واقع کافی است ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۲ سانتی‌متر را با استفاده از قضیه فیثاغورس محاسبه کنیم:



$$(1^2 - x^2) = x^2$$

$$x = \sqrt{3}$$

۷۶ مطابق شکل زیر سعید می‌خواهد از گوشه زمین به حسین پاس بدهد تا حسین توپ را به تیر دروازه بزند. حسین، از فاصله ۵ متری خط دروازه، در چه فاصله‌ای از سعید بایستد تا توپ در مجموع کوتاه‌ترین مسیر ممکن را طی می‌کند؟ (می‌دانیم عرض این زمین فوتبال ۴۰ متر و طول دروازه ۸ متر است)



$$8 \text{ متر} \quad (2)$$

$$13 \text{ متر} \quad (4)$$

$$6 \text{ متر} \quad (1)$$

$$12 \text{ متر} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴ کمترین فاصله زمانی اتفاق می‌افتد که حسین دقیقاً بر روی رأس متساوی‌الساقین قرار گرفته باشد که سعید و تیرک دروازه دو رأس دیگر آن باشند. عرض زمین ۴۰ متر است بنابراین نیمی از آن ۲۰ متر خواهد بود. بنابراین فاصله تیرک دوم دروازه از سعید برابر با ۲۴ متر است. بنابراین قاعده مثلث متساوی‌الساقین ۲۴ متر است. حال کافی است طول ساق را با استفاده از فیثاغورس محاسبه کنیم.

$$12^2 + 5^2 = x^2$$

$$x = 13$$

۷۷ محیط شکل مقابل کدام است؟

۱ $4\sqrt{3}$

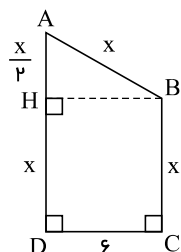
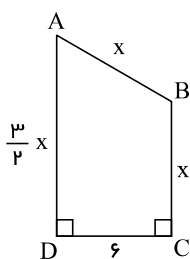
۳ $14\sqrt{3} + 6$

۲ $\sqrt{48} + 6$

۴ $20\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۳

از رأس B، بر ضلع مقابلش، پاره خط BH را عمود رسم می کنیم. به این ترتیب در مثلث قائم الزاویه ABH داریم:



$$AB^2 - AH^2 = BH^2$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 6^2 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36 \times 4}{3} = 48 \Rightarrow x = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

محیط شکل: $AD + DC + BC + AB$

$$= \frac{3}{2}x + 6 + x + x = \frac{5}{2}x + 6 = \frac{5}{2} \times 4\sqrt{3} + 6 = 14\sqrt{3} + 6$$

۷۸ در شکل زیر، x کدام است؟

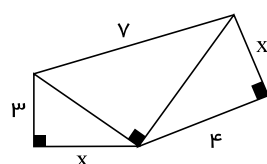
۱ ۲

۳ $\sqrt{7}$

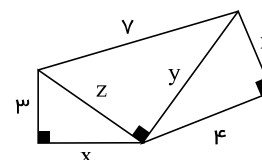
۲ $2\sqrt{3}$

۴ ۳

پاسخ: گزینه ۲ با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث های قائم الزاویه داریم:



$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 49 \\ y^2 = 16 + x^2 \\ z^2 = 9 + x^2 \end{cases} \Rightarrow (16 + x^2) + (9 + x^2) = 49 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$



۷۹ در شکل زیر مساحت مستطیل ABCD چند واحد مربع است؟

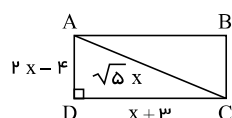
۱ ۱۰

۲ ۵٫۵

۳ ۵

۴ ۱۱

پاسخ: گزینه ۲ با استفاده از رابطه فیثاغورس مقدار x را به دست می آوریم:



$$\triangle ADC: AD^2 + DC^2 = AC^2$$

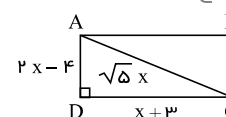
$$(2x - 4)^2 + (x + 3)^2 = (\sqrt{5}x)^2$$

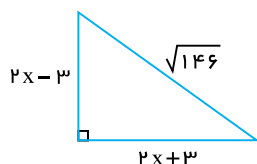
$$(2x - 4)(2x - 4) + (x + 3)(x + 3) = (\sqrt{5}x)(\sqrt{5}x)$$

$$4x^2 - 16x + 16 + x^2 + 6x + 9 = 5x^2 \Rightarrow 5x^2 - 10x + 25 = 5x^2$$

$$\Rightarrow 10x = 25 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = AD \times DC = (2x - 4)(x + 3) = 1 \times 5.5 = 5.5 \text{ واحد مربع}$$



۸۰ در شکل مقابل مقدار x چند است؟

۸ (۲)

۱۶ (۱)

۲ (۴)

۴ (۳)

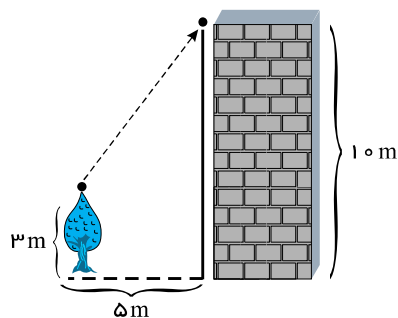
پاسخ: گزینه ۳

رابطه فیثاغورس و حل معادله: اتحاد مربع را هم که بلدید!

$$(2x-3)^2 + (2x+3)^2 = \sqrt{146}^2 \Rightarrow 4x^2 + 9 - 12x + 4x^2 + 9 + 12x = 146 \Rightarrow 8x^2 = 128 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

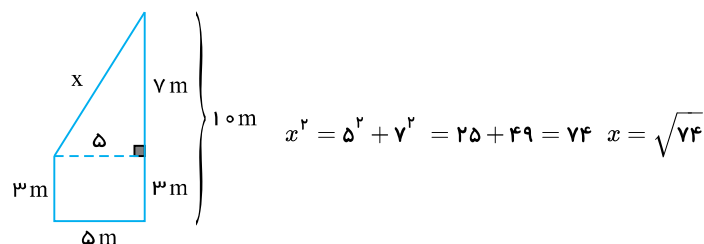
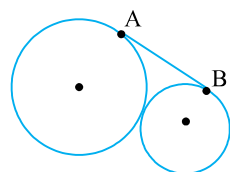
۸۱ پرنده‌ای از نوک یک درخت ۳ متری به بالای یک ساختمان ۱۰ متری پرواز می‌کند. اگر فاصله درخت و ساختمان ۵ متر باشد، حداقل

مسافتی که پرنده طی کرده چه قدر است؟

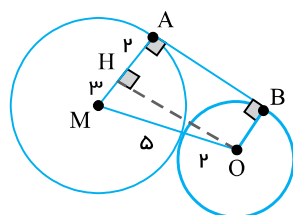
 $\sqrt{74}$ (۴) $\sqrt{72}$ (۳) $\sqrt{24}$ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ نمودار مسأله به شکل زیر است:

۸۲ دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ بر هم مماسند. در این صورت اندازه مماس مشترک دو دایره (AB) کدام است؟ $\sqrt{42}$ (۲) $\sqrt{41}$ (۱) $\sqrt{40}$ (۴) $\sqrt{43}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

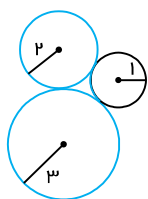
از مرکز دو دایره به A و B وصل می‌کنیم که در هر دو زاویه قائمه ایجاد می‌شود! مماس بر دایره بر شعاع در نقطه تماس عمود است!

$$5-2=3=HM, MO=5+2=7 \Rightarrow \Delta HMO: HO^2 = 7^2 - 3^2 = 40 \Rightarrow HO = \sqrt{40} \Rightarrow AB = HO = \sqrt{40}$$

۸۳ در شکل روبه‌رو داخل یک قطاع ۶۰ درجه از یک دایره، دایره‌ای کوچک‌تر قرار داده‌ایم، به‌طوری که بر دایره بزرگ و دو شعاع آن

مماس است. شعاع دایره کوچک چند برابر شعاع قطاع است؟

۸۴ در شکل زیر سه دایره دو به دو مماس‌اند و شعاع آن‌ها ۱ و ۲ و ۳ است. طول قوس پر رنگ کدام است؟



$$\frac{3\pi}{2} \quad (4)$$

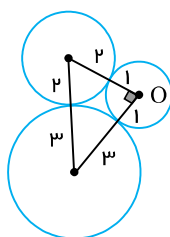
$$\frac{\pi}{2} \quad (3)$$

$$\frac{5\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

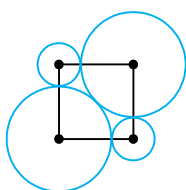
باید مرکز سه دایره را به هم وصل کنیم و مثلثی بسازیم و اضلاعش را حساب کنیم



همان‌طور که در شکل پیداست، اضلاع مثلث ۳ و ۴ و ۵ هستند و مثلث قائم‌الزاویه است پس زاویه O قائمه است و طول قوس 270° است یعنی $\frac{3}{4}$ محیط دایره.

$$\text{طول قوس رنگی} = \frac{3}{4} \times (2\pi \times r) = \frac{3}{4} \times 2\pi \times 1 = \frac{3\pi}{2}$$

۸۵ در شکل روبه‌رو دو دایره کوچک برابر و دو دایره بزرگ هم برابرند و همگی دایره‌ها بر رأس‌های یک مربع را تشکیل می‌دهند. نسبت شعاع دایره بزرگ به شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟



$$2,5 \quad (4)$$

$$\sqrt{5} \quad (3)$$

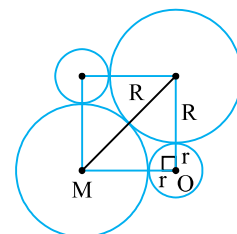
$$\frac{2}{9} \quad (2)$$

$$1 + \sqrt{2} \quad (1)$$

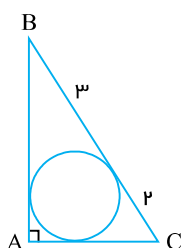
پاسخ: گزینه ۱ قطر مربع را رسم می‌کنیم، شعاع دایره بزرگ را با R و کوچک را با r نشان می‌دهیم و در مثلث قائم‌الزاویه AMO چون قطر مربع $\sqrt{2}$ برابر ضلع است داریم:

$$2R = \sqrt{2}(R + r) \Rightarrow 2R - \sqrt{2}R = \sqrt{2}r \Rightarrow (2 - \sqrt{2})R = \sqrt{2}r$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1$$



۸۶ در شکل مقابل ABC مثلث قائم‌الزاویه است و دایره‌ای در آن محاط شده است. مساحت این دایره کدام است؟



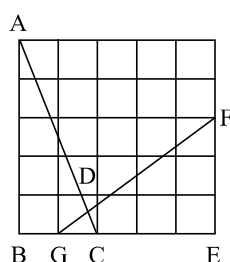
$$\frac{\pi}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad (3)$$

$$\pi \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (1)$$

۸۸ در شکل زیر، نسبت محیط مثلث $\triangle ABC$ به $\triangle EGF$ چند واحد است؟ (هر ضلع مربع‌های کوچک را یک واحد در نظر بگیرید.)



$$\frac{12 + \sqrt{29}}{7} \quad (4)$$

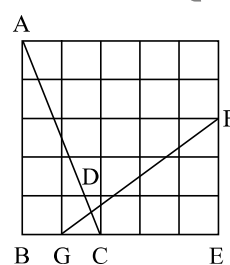
$$\frac{12}{7 + \sqrt{29}} \quad (3)$$

$$\frac{12 + \sqrt{29}}{7} \quad (2)$$

$$\frac{7 + \sqrt{29}}{12} \quad (1)$$

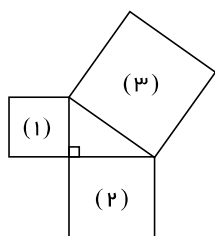
پاسخ: گزینه ۱ طبق رابطه فیثاغورس در مثلث‌ها داریم:

$$\begin{aligned} \triangle ABC : AC^2 &= AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 5^2 + 2^2 \Rightarrow AC = \sqrt{29} \\ \triangle EGF : FG^2 &= EF^2 + EG^2 \Rightarrow FG^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow FG = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

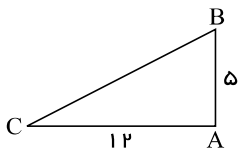


$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ محیط} &= 5 + 2 + \sqrt{29} = 7 + \sqrt{29} \Rightarrow \frac{\triangle ABC \text{ محیط}}{\triangle EGF \text{ محیط}} = \frac{7 + \sqrt{29}}{12} \\ \triangle EGF \text{ محیط} &= 3 + 4 + 5 = 12 \end{aligned}$$

۸۹ در شکل زیر، اگر محیط مربع (۱)، ۲۴ سانتی‌متر و مساحت مربع (۲)، ۶۴ سانتی‌متر مربع باشد، آنگاه محیط مربع (۳) چند سانتی‌متر است؟



۹۲ محیط مثلث زیر کدام است؟ ($\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$)



۳۲ (۴)

۳۰ (۳)

۲۵ (۲)

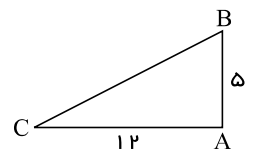
۲۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

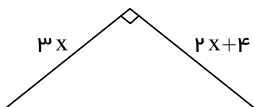
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ} \hat{A} + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

$$\rightarrow CB^2 = AC^2 + AB^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow CB = \sqrt{169} = 13$$

محیط مثلث = $5 + 12 + 13 = 30$



۹۳ وتر مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین زیر چند واحد است؟



۲۷

۲۶۶ (۴)

۳۵۶ (۳)

۱۲ (۲)

۲۸۸ (۱)

۹۷ با کدام یک از اعداد داده شده نمی توان مثلث قائم الزاویه ساخت؟

۱) ۱۰, ۸, ۶

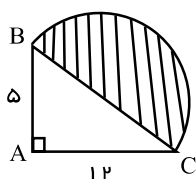
۲) ۱۳, ۱۲, ۵

۳) ۲۹, ۲۱, ۲۰

۴) ۱۵, ۱۳, ۱۲

پاسخ: گزینه ۴ برای داشتن مثلث قائم الزاویه باید رابطه $a^2 + b^2 = c^2$ بین ۳ ضلع مثلث برقرار باشد. با توجه به این موضوع، این رابطه فقط بین اعداد گزینه «۴» برقرار نیست.

۹۸ مساحت نیم دایره های که قطر آن برابر BC باشد چند واحد مربع است؟ ($\pi \simeq 3$)



۱) $\frac{507}{8}$

۲) $\frac{127}{2}$

۳) ۶۵

۴) $\frac{255}{4}$

پاسخ: گزینه ۱

$$AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow BC = \sqrt{169} = 13$$

$$28 = \frac{1}{2} \pi \times \frac{13}{2} \times \frac{13}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{169}{2} = \frac{507}{8}$$

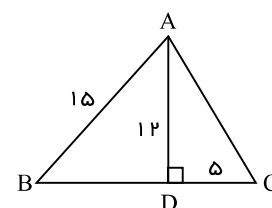
پاسخ: گزینه ۲

$$\triangle ADC \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow AC^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow AC^2 = 169 \Rightarrow AC = 13$$

$$\triangle ABD \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AB^2 = AD^2 + BD^2 \Rightarrow 15^2 = 12^2 + BD^2 \Rightarrow BD^2 = 225 - 144 = 81$$

$$\Rightarrow BD = 9 \Rightarrow BC = BD + DC = 9 + 5 = 14$$

$$ABC \text{ محیط مثلث} = AB + AC + BC = 15 + 13 + 14 = 42$$



۱۰۲ کدام گزینه اندازه اضلاع یک مثلث قائم الزاویه را نشان نمی دهد؟

$$2, 4, 4, 3, 2 \quad (4)$$

$$3, 6, 5, 3, 5 \quad (3)$$

$$2, \sqrt{13}, 3 \quad (2)$$

$$13, 12, 5 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳ اگر مثلثی قائم الزاویه باشد، رابطه فیثاغورس در آن برقرار است. می دانیم در مثلث قائم الزاویه، بزرگ ترین ضلع، وتر است. پس داریم:

$$\text{گزینه ۱: } 13^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow 169 = 144 + 25 \Rightarrow 169 = 169$$

$$\text{گزینه ۲: } (\sqrt{13})^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow 13 = 9 + 4 \Rightarrow 13 = 13$$

$$\text{گزینه ۳: } 5^2 \neq 3,5^2 + 3,6^2 \Rightarrow 25 \neq 12,25 + 12,96 \Rightarrow 25 \neq 25,21$$

$$\text{گزینه ۴: } 4^2 = 3,2^2 + 2,4^2 \Rightarrow 16 = 10,24 + 5,76 \Rightarrow 16 = 16$$

۱۰۳ برای رفتن به بالای دیواری، مطابق شکل زیر از یک نردبان به طول ۵ متر استفاده می کنیم. اگر فاصله ابتدای نردبان با پای دیوار ۳ متر باشد، ارتفاع دیوار چند متر است؟

پس $\triangle ABC$ نیز قائم الزویه است؛ پس $\angle ABC = 90^\circ$ است.

۱۰۵ محیط یک لوزی با قطرهای ۸ و ۶ سانتی متر، چند سانتی متر است؟

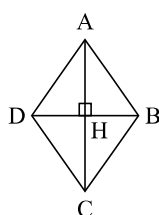
۲۴ (۱)

۴۸ (۲)

۲۰ (۳)

۱۰۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ باید طول ضلع لوزی را به دست بیاوریم. در لوزی دو قطر بر هم عمودند و یکدیگر را نصف می کنند. بنابراین اگر $AC = ۸$ و $BD = ۶$ باشد، داریم:



$$\begin{cases} AH = ۸ \div ۲ = ۴ \text{ سانتی متر} \\ BH = ۶ \div ۲ = ۳ \text{ سانتی متر} \end{cases}$$

مثلث ABH قائم الزویه است؛ پس طبق رابطه فیثاغورس:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = ۴^2 + ۳^2 = ۱۶ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow AB = \sqrt{۲۵} = ۵ \text{ سانتی متر}$$

سانتی متر $۲۰ = ۴ \times ۵ =$ محیط لوزی $\Rightarrow$ در لوزی هر چهار ضلع با هم برابرند

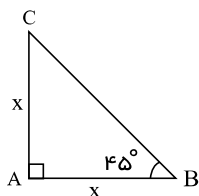
۱۰۶ در مثلث قائم الزویه، طول ضلع روبه روی زاویه ۴۵° درجه چند برابر طول وتر است؟

 $\frac{۲}{۳}$ (۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ (۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴ مثلث قائم الزویه زیر را در نظر بگیرید که یک زاویه آن $\hat{B} = ۴۵^\circ$ است. بنابراین زاویه دیگر نیز اجباراً باید ۴۵° باشد. پس مثلث قائم الزویه متساوی الساقین است. اگر طول ضلع های قائمه را که با هم مساوی هستند x بنامیم، طبق رابطه فیثاغورس طول وتر برابر است با:

$$BC^2 = x^2 + x^2 = ۲x^2 \Rightarrow BC = \sqrt{۲}x \Rightarrow x = \frac{۱}{\sqrt{۲}} BC$$

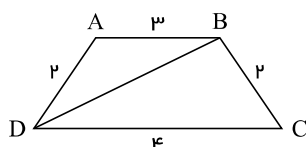
بنابراین طول ضلع روبه روی زاویه ۴۵° درجه، $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ طول وتر است.



۱۰۷ در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ یک دوزنقه متساوی الساقین است. طول قطر BD چه قدر است؟

 $\frac{۷}{۲}$ (۱) $\frac{۱۷}{۴}$ (۲) $\frac{۹}{۲}$ (۴)

۴ (۳)



پاسخ: گزینه ۳ از رأس های A و B بر ضلع DC عمود می کنیم. چون دو قاعده AB و CD موازی هستند، پس چهارضلعی $ABEF$ مستطیل است. بنابراین:

با توجه به این که این شکل، دوزنقه متساوی الساقین است و هم چنین به دلیل تقارن شکل داریم:

$$DF = CE = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$BEC \text{ مثلث } : 2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + BE^2 \Rightarrow BE^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$BDE \text{ مثلث } : BD^2 = BE^2 + DE^2 = \frac{15}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{15}{4} + \frac{9}{4} = \frac{24}{4} = 6 \Rightarrow BD = \sqrt{6} = 2$$

۱۰۸ نخ به طول ۱۲ سانتی متر داریم. یک مربع با آن می سازیم، به طوری که این مربع حداکثر محیط ممکن را داشته باشد. قطر مربع کدام است؟

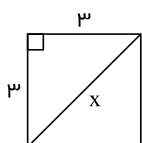
$$4 \quad (4)$$

$$4.5 \quad (3)$$

$$\sqrt{18} \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲ طول نخ در واقع اندازه محیط مربع است. پس داریم:



$$\text{محیط مربع} = 12 \Rightarrow \text{طول یک ضلع مربع} = 12 \div 4 = 3$$

$$\text{طول قطر مربع} = \sqrt{18} \Rightarrow x^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \sqrt{18}$$

۱۰۹ با توجه به شکل زیر، اندازه x کدام گزینه است؟

$$4 \quad (1)$$

$$\sqrt{24} \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

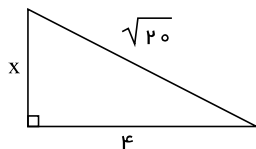
$$6 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳

طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$x^2 + 4^2 = (\sqrt{20})^2 \Rightarrow x^2 + 16 = 20 \Rightarrow x^2 = 20 - 16$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} \Rightarrow x = 2$$



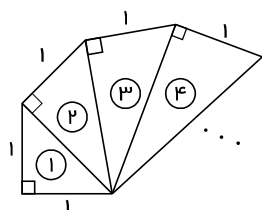
۱۱۰ در شکل زیر، طول وتر مثلث دهم چند برابر طول وتر مثلث هشتم است؟ (اعداد داخل دایره شماره مثلث را نشان می دهد).

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{11}}{3} \quad (2)$$

$$4 \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{11}}{4} \quad (4)$$



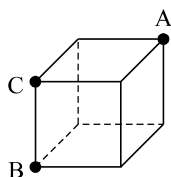
پاسخ: گزینه ۲ الگوی مثلث ها را به دست می آوریم:

$$\text{طول وتر : مثلث دوم} = \sqrt{2}, \text{ طول وتر : مثلث اول} = \sqrt{3}, \dots$$

با قضیه فیثاغورس نتیجه می شود که اندازه وتر در مثلث n ام برابر $\sqrt{n+1}$ است.

$$\frac{\text{طول وتر مثلث دهم}}{\text{طول وتر مثلث هشتم}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{11}}{3}$$

۱۱۱ مورچه‌ای درون یک اتاق معکبی شکل به طول یال واحد، حرکت می‌کند. او از یک کنج اتاق شروع به حرکت می‌کند و تا کنج دیگری که در هیچ وجهی با کنج اول مشترک نیست، از روی سقف و دیوارها می‌رود. اگر او کوتاه‌ترین مسیر را پیموده باشد، چه مسافتی را طی کرده است؟ (مورچه فقط از یال‌ها و یا قطر وجه‌ها عبور می‌کند.)



$$1 + \sqrt{2} \quad (2)$$

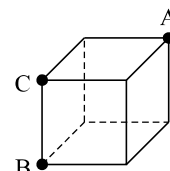
$$\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{5} + \sqrt{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{8} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲ فرض کنید مورچه از رأس A به رأس B آمده باشد به فرض این که حتماً از سقف و دیوارها برود کوتاه‌ترین مسیر حرکت مورچه رسیدن از رأس A به رأس C روی قطر وجه بالایی و سپس حرکت از طریق یال CB به رأس B است و طبق قضیه فیثاغورس، طول AC را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} AC &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ BC &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AC + BC = 1 + \sqrt{2}$$



۱۱۲ اندازه دو ضلع قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲ و ۶ واحد است. عمودمنصف وتر امتداد ضلع کوچک‌تر را در M قطع می‌کند. فاصله M از نزدیک‌ترین رأس این مثلث چند واحد است؟

$$\frac{25}{3} \quad (4)$$

$$\sqrt{80} \quad (3)$$

$$8 \quad (2)$$

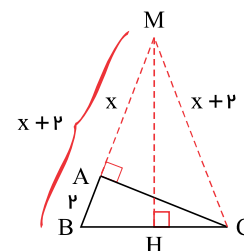
$$7.5 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲ با توجه به این که هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است داریم:

$$\overline{MB} = \overline{MC} = x + 2$$

$$\overline{AMC} : \overline{MC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AC}^2 \Rightarrow (x + 2)^2 = x^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 36$$

$$\Rightarrow 4x = 36 - 4 = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{4} = 8$$



۱۱۳ دوزنقهٔ روبه‌رو، متساوی‌الساقین است. اندازه قطر آن کدام است؟

$$\sqrt{100} \quad (2)$$

$$\sqrt{48} \quad (1)$$

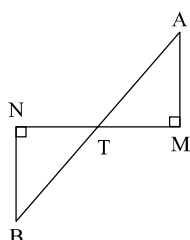
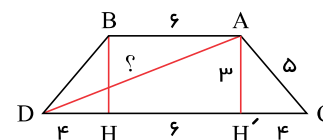
$$\sqrt{109} \quad (4)$$

$$\sqrt{108} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به شکل و این که چهارضلعی ABHH' مستطیل است، داریم:

$$\overline{CH'} = \frac{14 - 16}{2} = 1 \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} \overline{AH'} = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \quad \overline{ADH'} : \overline{AD}^2 = \overline{AH'}^2 + \overline{DH'}^2$$

$$= 9 + 100 = 109 \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{109}$$



۱۱۴ در شکل زیر نقطه T وسط NM است. طبق کدام حالت مثلث‌ها هم‌نهشت‌اند؟

$$\text{ض ز ز} \quad (2)$$

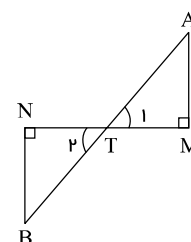
$$\text{ض ض ض} \quad (1)$$

$$\text{وض} \quad (4)$$

$$\text{وز} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} MT = NT, \text{ } T \text{ وسط } MN \\ \widehat{M} = \widehat{N} = 90^\circ \\ \widehat{T}_1 = \widehat{T}_2 \text{ متقابل به راس} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \triangle ATM = \triangle NBT$$



۱۱۵ کدام یک از گزینه‌های زیر یک حالت هم‌نهشتی برای مثلث‌ها است؟

- ۱) تساوی دو ضلع و یک زاویه ۲) تساوی سه ضلع ۳) تساوی سه زاویه ۴) گزینه‌ی ۱ و ۲

پاسخ: گزینه ۲ در گزینه ۱ باید گفته می‌شد دو ضلع و زاویه بین پس دو ضلع و یک زاویه غلط است.

۱۱۶ کدام یک از گزینه‌های زیر رابطه هم‌نهشتی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع نیست؟

- ۱) (ض ض ض) ۲) (ض ض ض) ۳) (وتر و یک ضلع) ۴) (ز ض ز)

پاسخ: گزینه ۳ مثلث متساوی‌الاضلاع سه ضلع مساوی دارد به حالت سه ضلع هم‌نهشت است و زاویه هر ضلع آن 60° می‌باشد پس به صورت (ض ض ض) و (ز ض ز) هم هم‌نهشت است.

۱۱۷ کدام یک از گزینه‌های زیر جزء حالت‌های هم‌نهشتی در مثلث نمی‌تواند باشد؟

- ۱) (ز ز ز) ۲) (ض ض ض) ۳) (ز ض ز) ۴) (ض ض ض)

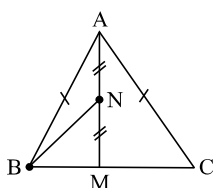
پاسخ: گزینه ۱ حالت‌های هم‌نهشتی فقط به صورت، سه ضلع، دو ضلع و زاویه بین، دو زاویه و وتر و یک ضلع شامل می‌شود.

۱۱۸ اگر زاویه میان ارتفاع و میانه وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه 35° باشد آنگاه اندازه زوایای آن مثلث کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- ۱) $90, 40, 50$ ۲) $90, 25, 65$ ۳) $90, 35, 55$ ۴) $90, 27.5, 62.5$

پاسخ: گزینه ۴ در هر مثلث قائم‌الزاویه میان، میانه و ارتفاع وارد بر وتر برابر اختلاف اندازه دو زاویه حاده آن مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد و چون $90 - 27.5 = 62.5$ پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۱۱۹ در مثلث مقابل نیمساز زاویه A را رسم می‌نماییم و محل تلاقی آن با ضلع BC را M می‌نامیم حال میانه وارد بر ضلع AM از مثلث

ABM را رسم می‌نماییم و محل تلاقی آن را با AM را N می‌نامیم. مساحت مثلث ABN چه کسری از مساحت $\triangle ABC$ است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه ۳ چون $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است پس نیمساز AM همان میانه وارد بر ضلع BC است پس $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$ همچنین چون BN میانه واردبر AM است. پس $S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABM}$ پس مساحت $\triangle ABN$ ، $\frac{1}{4}$ مساحت $\triangle ABC$ است.۱۲۰ اگر در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ اندازه میانه وارد بر وتر و ارتفاع وارد بر وتر به ترتیب برابر ۵ و ۴ باشد آنگاه اندازه ضلع کوچک‌ترمثلث $\triangle ABC$ را بیابید.

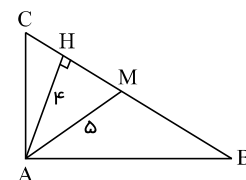
- ۱) $4\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{20}$ ۳) $5\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{10}$

پاسخ: گزینه ۲ چون در مثلث قائم‌الزاویه اندازه میانه وارد بر وتر نصف وتر است. پس $MB = 5$. از طرفی طبق قضیه فیثاغورس برای مثلث $\triangle AMH$ داریم:

$$HM = 3$$

$$\overline{CH} = 2\overline{AM} - \overline{MB} - \overline{MH} \rightarrow \overline{CH} = 2$$

$$\rightarrow AC = \sqrt{4^2 + 2^2} \rightarrow AC = \sqrt{20}$$



۱۲۱ مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع قائمه ۸ و ۱۲ را در نظر بگیرید. نسبت اندازه میانه وارد بر ضلع متوسط این مثلث به میانه وارد بر وتر را بیابید.

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{10}{\sqrt{52}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{10}{\sqrt{208}} \quad (1)$$

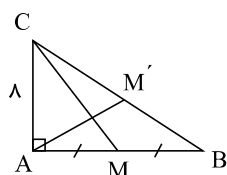
پاسخ: گزینه ۳ میانه وارد بر ضلع ۱۲ واحدی را رسم می‌نماییم. $AM = BM = 6$ طبق قضیه فیثاغورس برای $\triangle ACM$ داریم: $CM = 10$.

از طرفی طبق قضیه فیثاغورس برای $\triangle ABC$ داریم: $CB = 2\sqrt{52}$.

$$\sqrt{52} = \frac{2\sqrt{52}}{2} \quad \text{چون میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس:}$$

$$\rightarrow \frac{CM}{AM} = \frac{10}{\sqrt{52}}$$

پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.



۱۲۲ در مثلث ABC میانه‌های AM و CN را رسم می‌نماییم و نقطه تلاقی آنها را O می‌نامیم. نسبت مساحت مثلث AON به مساحت چهارضلعی $NOMB$ را بیابید.

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

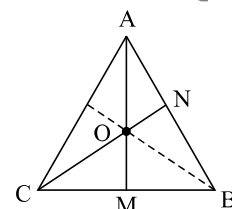
$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا میانه نظیر رأس B را نیز رسم می‌نماییم. از آنجا که مثلث ABC به ۶ مثلث با مساحت برابر تقسیم شده است پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} S_{AON} &= \frac{1}{6} S_{ABC} \\ S_{NOMB} &= 2\left(\frac{1}{6} S_{ABC}\right) \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{S_{AON}}{S_{NOMB}} = \frac{1}{2}$$



۱۲۳ با کدام سه طول داده شده می‌توان مثلث ساخت؟

$$\text{هیچ کدام} \quad (4)$$

$$5, 2, 1 \quad (3)$$

$$17, 16, 2 \quad (2)$$

$$15, 10, 3 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲ نکته: جمع ۲ ضلع مثلث همواره از ضلع سوم مثلث بزرگتر است.

با اضلاعی به طول ۱۷، ۱۶، ۲ می‌توان مثلث تشکیل داد زیرا: $17 < 16 + 2$, $16 < 17 + 2$, $2 < 16 + 17$

۱۲۴ در مثلث ABD اندازه زاویه D را بیابید در صورتی که AD و BD به ترتیب نیمسازهای خارجی رأس A و B باشند.

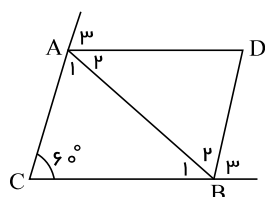
$$30^\circ \quad (1)$$

$$60^\circ \quad (2)$$

$$75^\circ \quad (3)$$

$$90^\circ \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

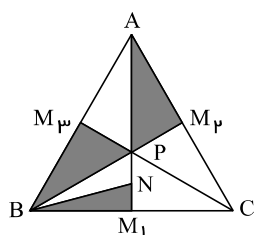


$$\text{نیمساز } AD \rightarrow \hat{A}_p = \hat{A}_p = \alpha$$

$$\text{نیمساز } BD \rightarrow \hat{B}_p = \hat{B}_p = \beta$$

$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ داریم: } C &= 180 - \hat{A}_1 - \hat{B}_1 \quad 60 = 180 - (180 - 2\alpha) - (180 - 2\beta) \\ 60 &= 2\alpha + 2\beta - 180 \rightarrow \alpha + \beta = 120^\circ \\ \Delta ABD \text{ داریم: } D &= 180 - A_p - B_p = 180 - (\alpha + \beta) = 60^\circ \end{aligned}$$

۱۲۵ در شکل مقابل AM_1 و BM_1 و CM_1 سه میانه مثلث ABC و BN میانه نظیر رأس B در مثلث BPM_1 است. مساحت قسمت رنگی را بیابید. در صورتی که مساحت ABC برابر S باشد.



$$\begin{aligned} \frac{5S}{12} \quad (1) \\ \frac{S}{3} \quad (3) \\ \frac{S}{2} \quad (2) \\ \frac{6S}{8} \quad (4) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم با رسم میانه وارد بر یک ضلع مثلث مساحت آن به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود پس با رسم سه میانه مثلث ABC مساحت آن به ۶ قسمت مساوی تقسیم می‌شود و میانه BN مساحت BPM_1 را نیز به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

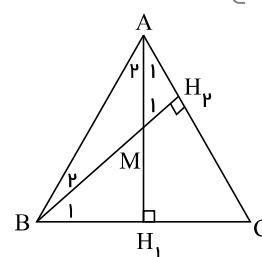
$$\text{مساحت قسمت رنگ شده: } 2\left(\frac{S}{6}\right) + \left(\frac{S}{6}\right) = \frac{5S}{12}$$

۱۲۶ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC زاویه حاده میان ارتفاع AH_1 و BH_1 را بیابید.

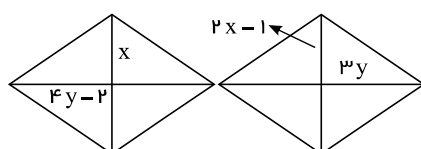
$$30^\circ \quad (1) \quad 45^\circ \quad (2) \quad 60^\circ \quad (3) \quad 90^\circ \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳ چون در هر مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع نظیر هر رأس نیمساز آن رأس نیز هست. پس:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_p = 30^\circ \rightarrow M_1 = 180 - 90 - A_1 \rightarrow M_1 = 60^\circ$$

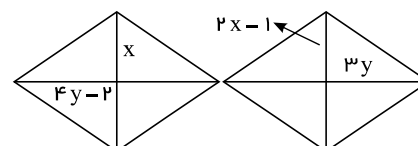


۱۲۷ در شکل زیر، دو لوزی هم‌نهشت‌اند؛ مجموع مساحت‌های این دو لوزی کدام است؟



$$\begin{aligned} 24 \quad (1) \\ 12 \quad (3) \\ 28 \quad (2) \\ 14 \quad (4) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۱ با توجه به این که دو لوزی هم‌نهشت‌اند، داریم:



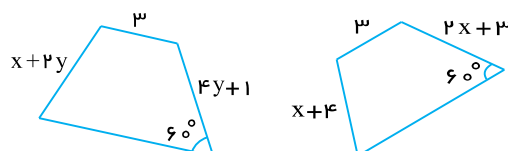
$$\text{بنابراین } 12 = 2(3y) = \text{قطر بزرگ و } 2x = 2 = \text{قطر کوچک}$$

$$\text{مساحت لوزی} = \frac{\text{قطر کوچک} \times \text{قطر بزرگ}}{2}$$

$$\text{واحد مربع } 24 = 12 \times 2 = 2\left(\frac{12 \times 2}{2}\right) = \text{مجموع مساحت‌های دو لوزی}$$

چون سوال از ما مجموع مساحت دو لوزی را خواسته داریم:

۱۲۸ دو چهارضلعی زیر هم‌نهشت هستند، مقدار $x + y$ کدام است؟



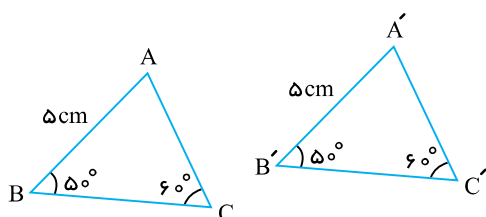
$$\begin{aligned} 6 \quad (1) \\ 4 \quad (3) \\ 3 \quad (2) \\ 5 \quad (4) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۴

به کمک زاویه 60° و ضلع ۳ واحدی می‌توان زوایای متناظر و اضلاع متناظر را تشخیص داد:

$$\begin{cases} x + 2y = x + 4 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2 \\ 4y + 1 = 2x + 3 \xrightarrow{y=2} 9 = 2x + 3 \Rightarrow 6 = 2x \Rightarrow x = 3 \Rightarrow x + y = 2 + 3 = 5 \end{cases}$$

۱۲۹ در شکل زیر دو مثلث در کدام حالت با هم هم‌نهشتند؟



گزینه (۴) درست است.

[۳] دو ضلع و زاویه بین

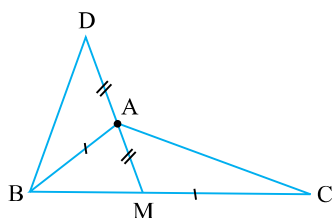
[۲] سه ضلع

[۱] دو زاویه و ضلع بین

پاسخ: گزینه ۱

اگر زاویه سوم هر کدام را حساب کنیم 70° است و با هم مساویند.

$$\begin{cases} \hat{A}' = \hat{A} \\ \hat{B}' = \hat{B} \\ A'B' = AB \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

۱۳۰ در شکل روبه‌رو A وسط DM است و $AB = MC$ ، اگر M وسط BC باشد و $\hat{D} + \hat{C} = 61^\circ$ ، آن‌گاه اندازه زاویه BAM چند درجه است؟

[۴] ۶۱

[۳] ۵۸

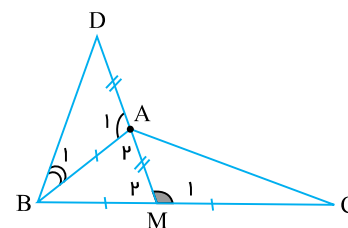
[۲] ۵۶

[۱] ۳۹

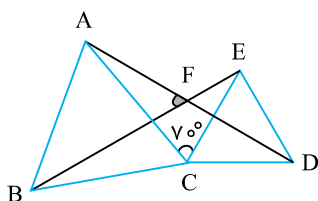
پاسخ: گزینه ۴

نشان می‌دهیم دو مثلث ABC و AMC بنابر حالت دو ضلع و زاویه بین هم‌نهشتند: $\hat{A}_1 = \hat{M}_1$ پس $\hat{A}_2 = \hat{M}_2$ هستند و چون $\hat{A}_2 = \hat{M}_2$ پس $\hat{A}_1 = \hat{M}_1$

$$\begin{cases} AD = AM \\ AB = MC \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle MCA \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C} \\ \hat{A}_1 = \hat{M}_1 \end{cases}$$



$$\hat{BAM} = \hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{D} = \hat{C} + \hat{D} = 61^\circ$$

۱۳۱ در شکل روبه‌رو ABC و ECD دو مثلث متساوی‌الاضلاع هستند زاویه AFB چند درجه است؟

[۴] ۶۰

[۳] ۵۰

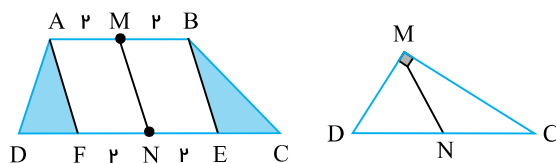
[۲] ۴۵

[۱] ۴۰

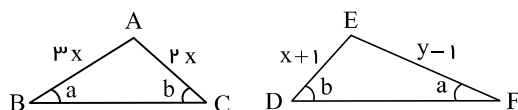
پاسخ: گزینه ۴

توجه کنید مثلث ACD و EBC هم‌نهشتند (اثباتش با شما، حالت هم‌نهشتی ض ض ض) پس: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ از طرفی: در مثلث FAB :

$$DF = EC = \frac{12 - 2}{2} = 5$$



۱۳۴ دو مثلث زیر هم‌نهشتند. حاصل $x - y$ کدام است؟ ($a \neq b$)



۱ (۴)

۳ (۳)

-۱ (۲)

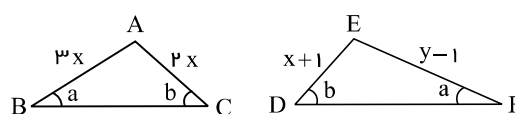
-۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث داریم:

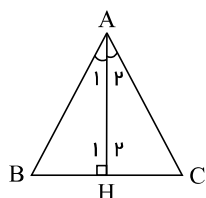
$$AC = ED \Rightarrow 2x = x + 1 \Rightarrow x = 1$$

$$AB = EF \Rightarrow 3x = y - 1 \Rightarrow 3(1) = y - 1 \Rightarrow y = 4$$

$$\Rightarrow x - y = 1 - 4 = -3$$



۱۳۵ مثلث ABC متساوی‌الساقین است. کدام رابطه لزوماً در مورد شکل زیر صحیح است؟ ($AB = AC$)



$$\overline{BH} = \overline{CH} \quad (۴)$$

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C} \quad (۳)$$

$$\overline{BH} = \overline{AC} \quad (۲)$$

$$\hat{A}_1 = \hat{C} \quad (۱)$$

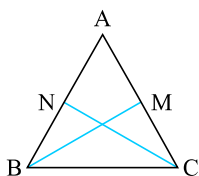
پاسخ: گزینه ۴ چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، بنابراین $\hat{B} = \hat{C}$ ، $AB = AC$. پس:

گزینه ۴: ممکن است هم‌نهشت نباشند.

۴۷ ز ض ز

$$\left. \begin{array}{l} \text{شعاع دایره بزرگ} \quad AO = DO \\ \text{شعاع دایره کوچک} \quad BO = CO \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \hat{AOB} \cong \hat{DOC} \quad \text{ض.ض.ض.}$$

۱۴۰ در مثلث متساوی الساقین ABC ، BM و CN میانه‌های وارد بر ساق‌ها هستند. دلیل تساوی دو مثلث ABM و ANC کدام گزینه است؟



ض ض ض (۱۴)

پاسخ: گزینه ۱ شعاع قطاع همان شعاع دایره است. وقتی دو قطاع هم‌نهشت باشند پس شعاع آن‌ها برابر است پس شعاع دو دایره برابر است. هر دو دایره که شعاع برابر داشته باشند هم‌نهشت هستند. هم‌چنین دو قسمت هاشورخورده هم‌نهشت هستند. ولی هر دو قطاع دیگر از دو دایره لزوماً هم‌نهشت نیستند.

۱۴۴ چند تا از عبارات زیر درست است؟

- (الف) هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.
 (ب) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.
 (ج) در هر مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع و نیم‌ساز هر زاویه بر هم منطبق است.

(۴) هیچ‌یک درست نیست.

(۳) یکی درست است.

(۲) دو تا درست است.

(۱) هر سه تا درست است.

پاسخ: گزینه ۲

برای اثبات نادرستی عبارت (ج) می‌توان مثلث روبه‌رو را مثال زد.

در واقع در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع و نیم‌ساز بر هم منطبق هستند.



۱۴۵ کدام‌یک از گزینه‌های زیر جزو حالت‌های هم‌نهشتی نیست؟

$$\begin{cases} AB = BC = 4 \\ DB = DB \\ \hat{B}AD = \hat{B}CD \end{cases} \Rightarrow \text{دو مثلث } BCD, BAD \text{ بنابر حالت برابری وتر و یک ضلع قائمه هم‌نهشت هستند}$$

$$\rightarrow AD = DC = 3 \rightarrow \text{محیط } ABCD = 4 + 4 + 3 + 3 = 14$$

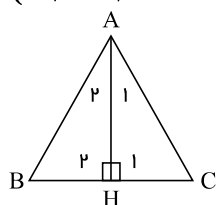
$$\text{مجموع محیط‌های دو شکل بریده شده} = 2 \times 14 = 28$$

۱۴۹ اگر در یک مثلث ارتفاع و نیم‌ساز رسم شده از یک رأس بر هم منطبق باشند، آنگاه مثلث چه نوع مثلثی است؟

۱) متساوی‌الساقین ۲) چنین اتفاقی غیرممکن است. ۳) قائم‌الزاویه غیرمتساوی‌الساقین ۴) در همه مثلث‌ها این اتفاق می‌افتد.

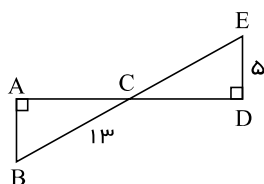
پاسخ: گزینه ۱ مثلث ABC را در نظر بگیرید که ارتفاع و نیم‌ساز رسم شده از رأس A بر هم منطبق‌اند. پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$. پس:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AH = AH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{مشترک}} \xrightarrow{\text{قضیة}} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \xrightarrow{\Delta} \xrightarrow{\Delta} AB = AC$$



مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۱۵۰ در شکل زیر، اگر دو مثلث ABC و CDE هم‌نهشت باشند، اندازه AD کدام است؟



۲۴ ۴

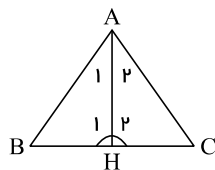
۱۲ ۳

۲۶ ۲

۱۰ ۱

پاسخ: گزینه ۴ چون در مثلث ABC و CDE هم‌نهشت هستند، پس $ED = AB = 5$ و $AC = CD$ و $BC = CE = 13$ و طبق قضیة فیثاغورس داریم:

۱۵۳ اگر ABC یک مثلث متساوی الساقین به رأس A باشد، چند تا از عبارت‌های زیر درست خواهد بود؟



الف) اگر AH بر BC عمود باشد، آنگاه $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

ب) اگر $BH = CH$ آن‌گاه AH بر BC عمود است.

ج) اگر $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ آن‌گاه $BH = CH$

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ صفر

پاسخ: گزینه ۴

عبارت (الف) درست است.

$$\begin{cases} AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \\ AH \perp BC \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

جمله (ب) درست است.

$$\begin{cases} AB = AC \\ AH \text{ مشترک} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \triangle ABH \cong \triangle ACH \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ BH = CH \end{cases}$$

جمله (ج) درست است زیرا:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AB = AC \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \triangle ABH \cong \triangle ACH \Rightarrow BH = CH \\ \hat{B} = \hat{C} \end{cases}$$

۱۵۴ سه پاره خط به طول‌های $4x - 4$, $x + 7$ و $6x$ اضلاع مثلثی هستند، مقادیر x به کدام صورت است؟

$$\frac{11}{9} < x < 4 \quad (۴)$$

$$2 < x < 3 \quad (۳)$$

$$\frac{5}{3} < x < 3 \quad (۲)$$

$$\frac{11}{9} < x < 3 \quad (۱)$$

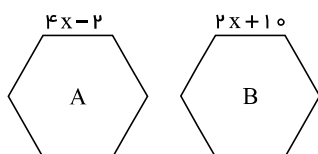
پاسخ: گزینه ۱ طبق رابطه مثلثی داریم:

$$4x - 4 < (x + 7) + 6x \Rightarrow x > -\frac{11}{3}$$

با توجه به این که طول یک پاره خط همواره باید مثبت باشد در حالت‌های دیگر رابطه مثلثی داریم:

$$6x < (4x - 4) + (x + 7) \Rightarrow x < 3, x + 7 < (4x - 4) + 6x \Rightarrow x > \frac{11}{9} \Rightarrow \frac{11}{9} < x < 3$$

۱۵۵ دو شش ضلعی منتظم مقابل با هم هم‌نهشت هستند. محیط شکل B برابر است با:



۱۳۶ (۲)

۳۶ (۱)

۱۳۲ (۴)

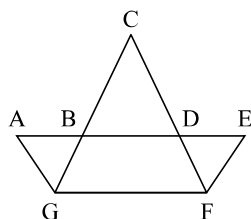
۳۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۴ به دلیل هم‌نهشتی شکل‌ها و تساوی اجزای متناظر می‌توان نوشت:

$$4x - 2 = 2x + 10 \Rightarrow 4x - 2x = 10 + 2 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$$

$$B \text{ طول هر ضلع شکل } B = 4(6) - 2 = 22 \Rightarrow P = 6 \times 22 = 132$$

۱۵۶ در شکل مقابل، چهارضلعی‌های $AEFG$ و $BDFG$ دوزنقه متساوی‌الساقین هستند. دلیل تساوی مثلث‌های ABG و DEF کدام است؟



۱ (ض ض ض)

۲ (ز ض ز)

۳ (ض ض ض)

۴ دلایل کافی برای تساوی دو مثلث وجود ندارد.

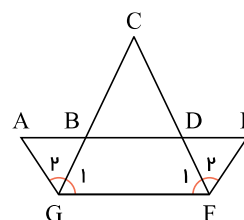
پاسخ: گزینه ۳

$$AGFE \text{ دوزنقه متساوی‌الساقین} \Rightarrow \begin{cases} EF = AG \\ \hat{AGF} = \hat{EFG} (1) \end{cases}$$

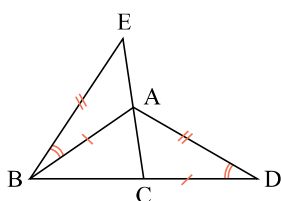
$$\Rightarrow (1), (2) \hat{F}_r = \hat{G}_r (3)$$

$$BDFG \text{ دوزنقه متساوی‌الاضلاع} \Rightarrow \begin{cases} BG = FD \\ \hat{F}_1 = \hat{G}_1 (2) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} EF = AG \\ BG = FD \\ \hat{G}_r = \hat{F}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABG \cong \triangle DEF \text{ (ض ض ض)}$$



۱۵۷ با توجه به شکل مقابل، کدام نتیجه‌گیری لزوماً درست است؟



۲ $\overline{AB} = \overline{BC}$

۴ $\overline{AE} = \overline{AC}$

۱ $\overline{AB} = \overline{AC}$

۳ $\overline{AE} = \overline{BC}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\left. \begin{array}{l} \overline{CD} = \overline{AB} \\ \hat{ADC} = \hat{ABE} \\ \overline{AD} = \overline{BE} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CAD \cong \triangle ABE \text{ (ض ض ض)} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \overline{AE} = \overline{AC}$$

۱۵۸ در مثلث ABC ، اندازه ضلع $\overline{BC}$ دو برابر ضلع $\overline{AB}$ است. میانه $\overline{AM}$ را از طرف A به اندازه خودش تا نقطه D امتداد می‌دهیم.

نسبت $\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}$ کدام گزینه است؟

۴ مساوی ۲

۳ کوچک‌تر از ۱

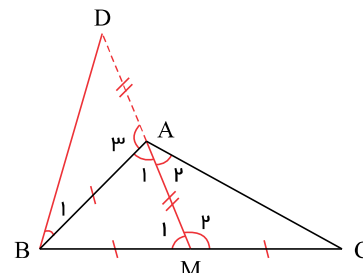
۲ بزرگ‌تر از ۱

۱

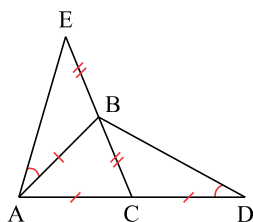
پاسخ: گزینه ۱ طبق شکل زیر می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{MC} \\ \triangle ABM : \overline{AB} = \overline{BM} \\ \overline{AD} = \overline{AM} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{M}_1 \Rightarrow 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{M}_1 \Rightarrow \hat{A}_r = \hat{M}_r$$

$$\Rightarrow \triangle ADB \cong \triangle AMC \text{ (ض ض ض)} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{AC} \Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = 1$$



۱۵۹ اگر در شکل روبه‌رو $\hat{BAC} = 52^\circ$ باشد، آن‌گاه مجموع دو زاویه E و D چند درجه است؟



۵۲ (۲)

۳۸ (۱)

۶۴ (۴)

۵۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به این‌که مثلث $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است، داریم:

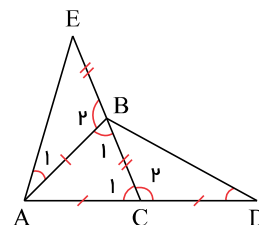
$$\hat{B}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow 180^\circ - \hat{B}_1 = 180^\circ - \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{B}_r = \hat{C}_r$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{DC} \\ \overline{BC} = \overline{BE} \\ \hat{C}_r = \hat{B}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BCD \cong \triangle EAB \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D} \quad (*)$$

$$\hat{B}_1 = (180^\circ - \hat{BAC}) \div 2 = (180^\circ - 52^\circ) = 64^\circ$$

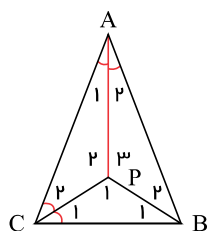
و از آن‌جایی‌که $\hat{B}_1$ زاویه خارجی مثلث ABE است پس:

$$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 + \hat{E} \xrightarrow{(*)} \hat{B}_1 = \hat{D} + \hat{E} \xrightarrow{\hat{B}_1 = 64^\circ} \hat{D} + \hat{E} = 64^\circ$$



۱۶۰ در شکل مقابل $\overline{AC} = \overline{AB}$ و $\hat{CAP} = \hat{BAP}$ می‌باشد. اگر $\hat{CPB} = 2\hat{PBC}$ ، حاصل عبارت $\hat{CAP} + \hat{ACP}$ برابر است

با:



۱۳۵° (۲)

۴۵° (۱)

۵۰° (۴)

۸۰° (۳)

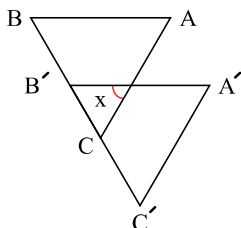
پاسخ: گزینه ۱ با توجه به حالت‌های هم‌نهشتی مثلث‌ها داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AP} = \overline{AP} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_r \\ \overline{AC} = \overline{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BPA \cong \triangle CPA \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{ \begin{array}{l} \hat{P}_r = \hat{P}_l \\ \overline{CP} = \overline{BP} \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \quad (1) \end{array} \right\}$$

$$\text{صورت مسئله: } \hat{P}_1 = 2\hat{B}_1 \xrightarrow{(1)} \hat{P}_1 = 2\hat{C}_1 \xrightarrow{\hat{B}_1 + \hat{P}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ} \hat{C}_1 + \hat{C}_1 + 2\hat{C}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ \Rightarrow \hat{P}_1 = 90^\circ \xrightarrow{\hat{P}_r = \hat{P}_l} \hat{P}_1 + \hat{P}_r + \hat{P}_r = 360^\circ$$

$$\hat{P}_r = \hat{P}_l = \frac{360^\circ - 90^\circ}{2} = 135^\circ \Rightarrow \triangle ACP: \hat{A}_1 + \hat{C}_r = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

۱۶۱ در شکل روبه‌رو دو مثلث ABC و $A'B'C'$ باهم، هم‌نهشت هستند. زاویه x برابر است با:


 $180^\circ - (\hat{A} + \hat{ACB})$ (۲)

 $180^\circ + \hat{ACB}$ (۱)

 $180^\circ - \hat{A}$ (۴)

 $180^\circ - (\hat{B} + \hat{ACB})$ (۳)

پاسخ: گزینه ۳ از آن‌جا که دو مثلث هم‌نهشت هستند داریم:

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{ACB} = \hat{C}', \hat{A'B'C'} = \hat{B} \Rightarrow \hat{x} = 180^\circ - (\hat{A'B'C'} + \hat{C}') = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{ACB})$$

۱۶۲ در مثلث ABC داریم: $\overline{BC} = ۲\overline{AC}$ و میانه AM را از طرف A به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطه D برسیم نسبت

$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ برابر است با:

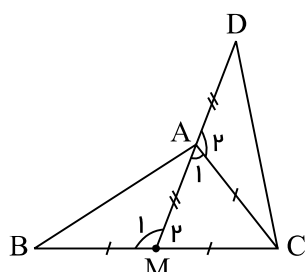
۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱



$$\triangle AMC \rightarrow \overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{MC}$$

$$\rightarrow \hat{A}_1 = \hat{M}_2 \rightarrow \hat{M}_1 = \hat{A}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AM} = \overline{MD} \\ \overline{MB} = \overline{AC} \\ \hat{M}_1 = \hat{A}_2 \end{array} \right\} \rightarrow \triangle AMB \cong \triangle MDC \text{ (ض ز ض)} \rightarrow \overline{AB} = \overline{DC} \rightarrow \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = 1$$

۱۶۳ در یک دوزنقه متساوی الساقین، دو قطر عمود بر هم هستند. اگر قاعده‌های این دو دوزنقه ۱۸ و ۶ باشند، اندازه ساق کدام است؟

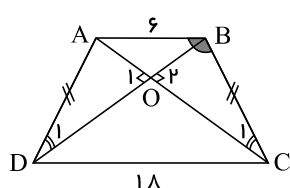
$\sqrt{5}$ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

$۶\sqrt{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ دوزنقه $ABCD$ متساوی الساقین است داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \overline{AD} = \overline{BC} \\ \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه تند}} \triangle AOD \cong \triangle BOC \rightarrow \begin{cases} \overline{AO} = \overline{BO} \\ \overline{OC} = \overline{OD} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB} = 3\sqrt{2} \\ \overline{OD} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{DC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 18 = 9\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \overline{AD}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OD}^2$$

$$\triangle AOB, \triangle DOC$$

$$\rightarrow \overline{AD}^2 = (3\sqrt{2})^2 + (9\sqrt{2})^2 = 18 + 162 = 180 \rightarrow \overline{AD} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

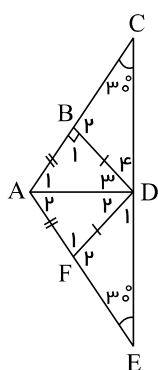
۱۶۴ در شکل زیر اندازه زاویه $\hat{D}_1$ را بیابید در صورتی که $\hat{F}_1 = \hat{F}_2$ و $\hat{D}_3 + \hat{D}_4 = 90^\circ$ باشد.

30° (۲)

15° (۱)

60° (۴)

45° (۳)



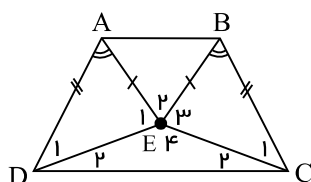
پاسخ: گزینه ۴

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } \hat{D}_3 + \hat{D}_4 = 90^\circ \\ \hat{C} = 30^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \hat{A}_1 = 60^\circ$$

دو مثلث ABD و AFD بنابر حالت ض ض ض باهم همبشت‌اند پس زوایای متناظر باهم برابرند.

$$\hat{F}_1 = \hat{F}_2 = 90^\circ, \hat{F}_1 = \hat{B}_1 = 90^\circ, \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 60^\circ \rightarrow \hat{D}_1 = 180^\circ - \hat{E} - \hat{F}_2 \rightarrow \hat{D}_1 = 60^\circ$$

۱۶۵ با توجه به شکل زیر کدام نتیجه گیری لزوماً درست است؟



$$\hat{E}_1 = \hat{E}_2 \quad (2)$$

$$\text{هر سه مورد} \quad (4)$$

$$\overline{DE} = \overline{CE} \quad (1)$$

$$\hat{D}_2 = \hat{C}_2 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴ دو مثلث $\triangle ADE$ و $\triangle BCE$ بنابر حالت ض ض با هم همنهشتاند. پس اضلاع و زوایای متناظر با هم برابرند:

$$\begin{cases} \overline{DE} = \overline{CE} \\ \hat{E}_1 = \hat{E}_2 \\ \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \end{cases}$$

$$\overline{DE} = \overline{CE} \rightarrow \text{چون } \triangle CED \text{ متساوی الساقین است} \rightarrow \hat{D}_2 = \hat{C}_2$$

پس هر مورد ۱، ۲ و ۳ صحیح‌اند.

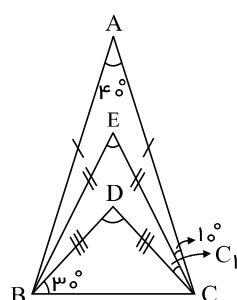
۱۶۶ اندازه زاویه $\hat{E} + \hat{C}_1$ کدام است؟

$$30^\circ \quad (1)$$

$$60^\circ \quad (2)$$

$$90^\circ \quad (3)$$

$$100^\circ \quad (4)$$



پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} \hat{A} = 40^\circ \\ \triangle ABC \text{ متساوی الساقین} \end{cases} \rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 70^\circ \quad (1)$$

$$\begin{cases} \triangle BCD \text{ متساوی الساقین} \\ \hat{DBC} = \hat{DCB} = 30^\circ \end{cases} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \hat{C}_1 = 70^\circ - 30^\circ - 10^\circ = 30^\circ \quad (3)$$

$$(2), (3) \rightarrow \angle EBC = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \angle E = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow \angle C_1 + \angle E = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$

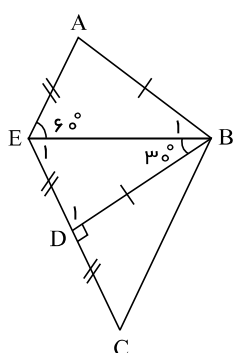
۱۶۷ در شکل مقابل اختلاف دو زاویه $\hat{B}_1$ و $\hat{C}$ را بیابید.

$$\text{صفر} \quad (1)$$

$$30^\circ \quad (2)$$

$$45^\circ \quad (3)$$

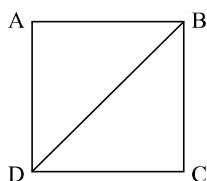
$$60^\circ \quad (4)$$



پاسخ: گزینه ۲ چون ضلع BE در هر دو مثلث $\triangle ABE$ و $\triangle DBE$ مشترک است. پس این دو مثلث بنابر حالت ض ض با هم همنهشتاند پس زوایای متناظر نیز با هم برابرند:

$$\left. \begin{aligned} \hat{B}_1 = \angle EBD = 30^\circ \rightarrow \hat{A} = 60^\circ \rightarrow \hat{D}_1 = 90^\circ \\ \hat{E}_1 = 60^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \triangle EBD \cong \triangle CBD \text{ بنابر حالت ض ض} \rightarrow \hat{C} = \hat{E}_1 = 60^\circ \Rightarrow \hat{C} - \hat{B}_1 = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

۱۶۸ در مربع $ABCD$ قطر BD را رسم می‌نماییم. دو مثلث ایجاد شده $\triangle ABD$ و $\triangle CBD$ بنابر کدام حالت با هم هم‌نهشت‌اند؟



۱) ز ض ز

۲) ض ض ض

۳) ض ض ض

۴) هر سه مورد

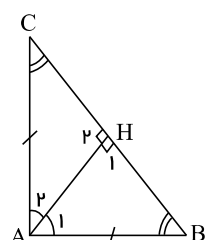
پاسخ: گزینه ۴

$$\text{چون } ABCD \text{ مربع است} : \begin{cases} \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{AB} = \overline{CB} \\ \overline{AD} = \overline{CD} \\ \overline{BD} = \overline{BD} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABD \cong \triangle CBD$$

$$\text{پس داریم} : \begin{cases} \overline{AB} = \overline{CB} \\ \overline{AD} = \overline{CD} \\ \hat{A} = \hat{C} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABD \cong \triangle CBD$$

$$\text{چون} : \begin{cases} AB = AD & \hat{DBA} = 45^\circ \\ A = 90^\circ & \hat{BDC} = 45^\circ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \hat{DBA} = \hat{DBC} = 45^\circ \\ BD = BD \text{ (مشرقی)} \\ \hat{ADB} = \hat{BDC} = 45^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ز}} \triangle ABD \cong \triangle CBD$$

۱۶۹ مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین مقابل را در نظر بگیرید ارتفاع وارد بر وتر را رسم نمایید و محل تلاقی آن را با وتر H بیابید. دو



مثلث $\triangle ABH$ و $\triangle ACH$ در چند حالت از حالات زیر هم‌نهشت‌اند؟ (۱) ز ض ز

۲) ض ض ض

۳) ض ض ض

۱) یک

۲) دو

۳) سه

۴) صفر

$$BH = CH$$

پاسخ: گزینه ۳ چون ABC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است پس داریم: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 45^\circ$

از طرفی چون ABC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است پس AH میانه وارد بر وتر و همچنین نیمساز زاویه A نیز می‌باشد. پس:

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{AC} \\ \hat{B} = \hat{C} = 45^\circ \\ \overline{BH} = \overline{CH} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABH \cong \triangle ACH$$

$$\begin{cases} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ HC = HB \\ \hat{B} = \hat{C} = 45^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ز}} \triangle ABH \cong \triangle ACH$$

$$\begin{cases} BH = CH \\ AB = AC \\ AH = AH \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABH \cong \triangle ACH$$

پس این دو مثلث در هر سه حالت مذکور با هم هم‌نهشت‌اند.

۱۷۰ در اثبات تساوی قطرهای یک مربع کدام حالت هم‌نهشتی بکار می‌رود؟

۱) ض ض ض

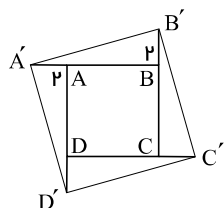
۲) ض ض ض

۳) ز ز ز

۴) هر سه مورد

پاسخ: گزینه ۱ اضلاع مربع با هم برابر و زاویه‌ها قائمه و با هم برابر هستند. لذا هر دو مثلث در حالت دو ضلع و زاویه بین با هم هم‌نهشت هستند.

۱۷۱ اضلاع مربع ABCD را در خلاف جهت چرخش عقربه‌های ساعت و به اندازه ۳ واحد امتداد دادیم و رئوس جدید را به یکدیگر متصل نمودیم تا یک چهارضلعی جدید به دست آوریم. با توجه به کدامیک از حالات زیر می‌توان نتیجه گرفت مثلث‌های بوجود آمده اطراف مربع ABCD دوه‌دو باهم هم‌نهشت‌اند؟



(۲) ض ز ض

(۱) ض ض ض

(۴) ز ض ز

(۳) ز ز ز

پاسخ: گزینه ۲ دو مثلث دلخواه مانند $AA'D'$ و $BB'A'$ را در نظر بگیرید. داریم:

(۱) طبق فرض $AA' = BB'$

اضلاع مربع $AD = BA$ } $\rightarrow AD + DD' = BA + AA' \rightarrow AD' = BA'$ (۲)

طبق فرض $DD' = AA'$ } $\rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 90^\circ \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_2 = 90^\circ$ (۳)

طبق (۱) و (۲) و (۳) این دو مثلث بنا بر حالت ض ض ز باهم هم‌نهشت‌اند.

۱۷۲ در کدام یک از حالات زیر دو مثلث را می‌توان هم‌نهشت نامید؟

یک زاویه و یک ضلع برابر

(۴)

(۳) یک زاویه و دو ضلع برابر

(۲) سه زاویه برابر

(۱) دو زاویه و ضلع بین برابر

پاسخ: گزینه ۱ یکی از حالت‌های هم‌نهشتی دو زاویه و ضلع بین برابر است.

سایر گزینه‌ها هم‌نهشتی دو مثلث را نتیجه نمی‌دهد.

۱۷۳ مرکز دایره محیطی یک مثلث دلخواه بر کدامیک از نقاط زیر منطبق است؟

(۴) محل تلاقی نیمسازها

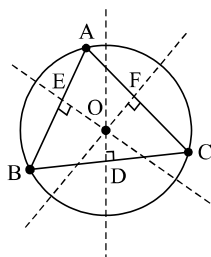
(۳) محل تلاقی عمودمنصف‌ها

(۲) محل تلاقی میانه‌های آن مثلث

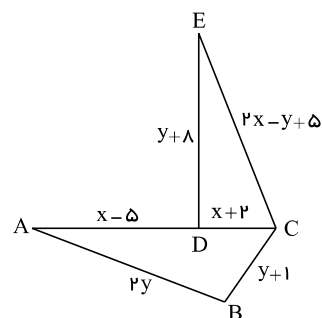
(۱) محل تلاقی ارتفاع‌های آن مثلث

پاسخ: گزینه ۳

مرکز دایره محیطی یک مثلث محل تلاقی عمودمنصف‌های آن مثلث است.



۱۷۴ در صورتی که دو مثلث ABC و CDE با هم هم‌نهشت باشند، محیط شکل زیر کدام است؟



(۱) ۴۵

(۲) ۶۳

(۳) ۵۴

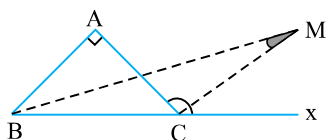
(۴) ۵۱

پاسخ: گزینه ۳

$$\triangle ABC \cong \triangle CDE \rightarrow \begin{cases} \overline{AB} = \overline{DE} \rightarrow 2y = y+8 \rightarrow y=8 \rightarrow AB=2y=16 \\ \overline{BC} = \overline{CD} \rightarrow y+1 = x+2 \rightarrow x=7 \rightarrow BC=y+1=9 \\ \overline{CA} = \overline{CE} \rightarrow CA = x-5 = 7-5 = 2 \rightarrow CE = x+2 = 9 \end{cases}$$

محیط شکل: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CE} + \overline{ED} + \overline{DA} = 16 + 9 + 11 + 16 + 2 = 54$

۱۷۵ در شکل روبه‌رو $\hat{A} = 90^\circ$ ، BM نیمساز زاویه B و CM نیمساز زاویه ACx است. زاویه M کدام است؟



۷۵° (۴)

۶۰° (۳)

۳۰° (۲)

۴۵° (۱)

پاسخ: گزینه ۱

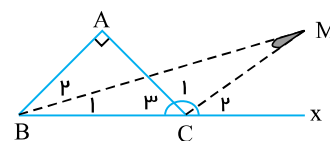
$$\begin{aligned}\hat{M} &= 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_2 + \hat{C}_1) = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_2 + \frac{1}{2}ACx) = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_2 + \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B})) \\ &= 180^\circ - (B_1 + \hat{C}_2 + 45^\circ + \hat{B}_2) = 180^\circ - \underbrace{(\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2)}_{90^\circ} + 45^\circ = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}A &= 45^\circ \\ \frac{1}{2}B &= \hat{B}_2\end{aligned}$$

$$\hat{M} = 90 + \frac{\hat{A}}{2}$$

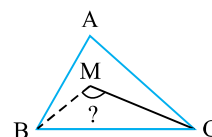
$$\hat{M} = 90 - \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\hat{M} = \frac{\hat{A}}{2}$$

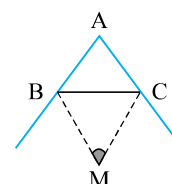


نکته: با این روش هر سه نکته زیر ثابت می‌شود:

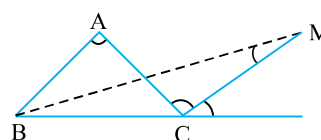
۱- زاویه بین دو نیمساز داخلی:



۲- زاویه بین دو نیمساز خارجی:



۳- زاویه بین نیمساز خارجی و یک نیمساز داخلی:



۱۷۶ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، زاویه بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر 18° است. کوچک‌ترین زاویه مثلث چند درجه است؟

۴۵ (۴)

۴۲ (۳)

۳۶ (۲)

۳۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

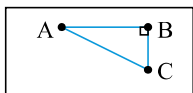
$$\begin{cases} \hat{B} - C = 18 \\ \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \end{cases}$$

کوچک‌ترین زاویه

$$2B = 108 \Rightarrow B = 54 \Rightarrow C = 90 - 54 = 36^\circ$$

۱۷۷ در شکل مقابل مثلث ABC قائم‌الزاویه است. $(\hat{B} = 90^\circ)$ و $AB = 10 - \pi$ و $BC = 6\text{cm}$ نیم‌استوانه‌ای به شعاع واحد و محور عمود بر AB ، مسیر مستقیم A و C را مانع شده است. مورچه‌ای بنابه دلایلی (!) باید فوراً از A به C برود! طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن چه قدر است؟

پاسخ: گزینه ۲



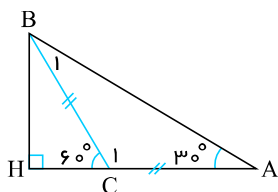
فرض کنید کل سطح یک قالیچه است که لبه آن به اندازه یک نیم استوانه بالا آمده و آن را از دو طرف می کشیم تا سطح صاف شود و مسیر مستقیم مورچه به دست آید.

از طول AB یک قطر کم می شود محیط یک نیم دایره اضافه می شود: $(R = 1)$

$$AB = (10 - \pi) + \frac{2\pi}{2} - 2 = 8$$

$$BC = 6 \Rightarrow AC^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow AC = 10$$

۱۷۸ در شکل زیر $\hat{A} = 30^\circ$ و $\hat{C} = 60^\circ$ می باشد. اگر طول $AC = 20 \text{ cm}$ باشد، طول AH برابر است با:



۴۰ cm (۱)

۳۰ cm (۲)

۲۰ cm (۳)

۱۰ cm (۴)

پاسخ: گزینه ۲

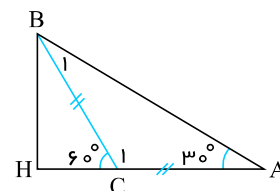
$$\hat{C}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = 30^\circ \Rightarrow BC = AC = 20 \text{ cm}$$

$$\hat{B}_2 = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

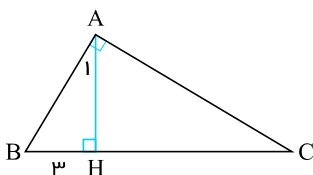
$$\Rightarrow HC = \frac{20}{2} = 10$$

$$\Rightarrow AH = HC + CA = 10 + 20 = 30$$



۱۷۹ مثلث ABC قائم الزاویه است. با توجه به اندازه های روی شکل و در صورتی که AH ارتفاع و زاویه $\hat{A}_1$ برابر 30° درجه باشد، طول

$AC \times BC$ با کدام گزینه برابر است؟



۳۶√۳ (۴)

۷۲√۳ (۳)

۶√۳ (۲)

۷۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\hat{A}_1 = 30^\circ \rightarrow AB = 2 \times 3 = 6, \quad \hat{B} = 60^\circ, \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ$$

$$AB = \frac{1}{2} BC \quad AC^2 = BC^2 - AB^2$$

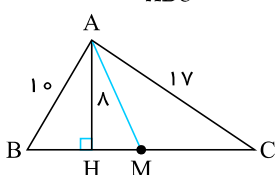
$$BC = 2 \times 6 = 12 \quad AC^2 = 12^2 - 6^2$$

$$AC = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

$$AC \times BC = 6\sqrt{3} \times 12 = 72\sqrt{3}$$

۱۸۰ در شکل مقابل AH ارتفاع و AM میانه است. اگر $AC = 17$ و $AB = 10$ و $AH = 8$ باشد، نسبت $\frac{S_{\triangle AHM}}{S_{\triangle ABC}}$ برابر کدام

گزینه است؟



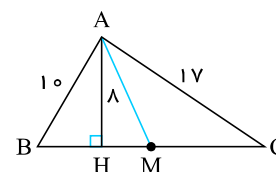
۳/۱۶ (۴)

۳/۱۴ (۳)

۳/۷ (۲)

۱/۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



$$BH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

$$CH = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$$

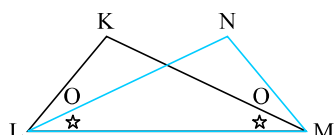
$$BC = 21$$

$$MH = BM - BH = \frac{21}{2} - 6 = \frac{9}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(8 \times 21) = 84$$

$$S_{\triangle AHM} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 8 = 18 \Rightarrow \frac{S_{\triangle AMH}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$$

۱۸۱ در شکل مقابل دلیل برابری دو مثلث $\triangle KLM$ و $\triangle LNM$ در کدام گزینه آمده است؟



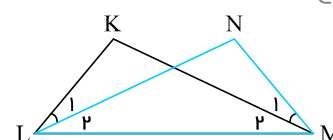
۲) ض ض ز

۱) ض ض ض

۴) دلایل کافی برای اثبات مساوی بودن آنها وجود ندارد.

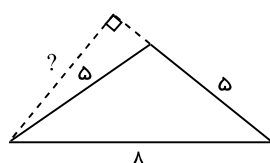
۳) ض ض ض

پاسخ: گزینه ۲



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{L} = \widehat{M} \\ LM = LM \text{ مشترک} \\ \widehat{L} = \widehat{M} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle KLM \cong \triangle LNM$$

۱۸۲ ارتفاع مشخص شده در مثلث زیر، چند واحد است؟



۲) ۴٫۲

۱) ۳٫۶

۴) ۵

۳) ۴٫۸

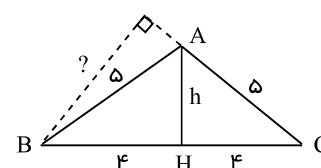
پاسخ: گزینه ۳ ارتفاع AH را رسم می کنیم. دو مثلث ABH و ACH بنابر حالت وتر و یک ضلع قائمه هم نهشت هستند.

$$BH = HC = \frac{8}{2} = 4$$

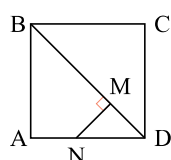
$$4^2 + h^2 = 5^2 \rightarrow h = 3$$

$$\frac{3 \times 8}{2} = \frac{? \times 5}{2} \Rightarrow ? = 4٫۸$$

مساحت مثلث ثابت است پس می توان رابطه زیر را نوشت:



۱۸۳ در مربع مقابل $\overline{BM} = \overline{BA}$ و $\angle BMN = 90^\circ$ باشد، اندازه $\angle ANB$ چند درجه است؟



۲) $66٫5^\circ$

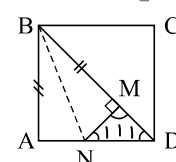
۱) $65٫5^\circ$

۴) $6۸٫5^\circ$

۳) $6۷٫5^\circ$

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا از B به N وصل می کنیم، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle MND: \hat{D}_1 = 45^\circ \\ \hat{M}_1 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{N}_1 = 45^\circ \Rightarrow \angle MNA = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

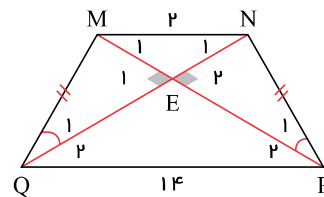


$$\left. \begin{array}{l} \overline{BM} = \overline{BA} \\ \overline{BN} = \overline{BN} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BMN \cong \triangle BAN \Rightarrow \angle ANB = \angle BNM \Rightarrow \angle ANB = \frac{\angle MNA}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67٫5^\circ$$

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به این که دوزنقه $MNPQ$ متساوی الساقین است، می توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{MQ} = \overline{NP} \\ \hat{Q}_1 = \hat{P}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MEQ \cong \triangle NEP \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{ME} = \overline{NE} \\ \overline{PE} = \overline{QE} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle QEP, \triangle MNE$$

$$\Rightarrow \text{قائم الزاویه متساوی الساقین} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N}_1 = \hat{Q}_2 = \hat{P}_2 = 45^\circ$$



پس بنابر نکته ضلع مقابل به زاویه 45° در مثلث قائم الزاویه داریم:

$$\overline{QE} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 14 = 7\sqrt{2}, \overline{ME} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{MN} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} \overline{MQ}^2 = \overline{QE}^2 + \overline{ME}^2$$

$$\Rightarrow \overline{MQ}^2 = (\sqrt{2})^2 + (7\sqrt{2})^2 = 2 + 98 = 100 \Rightarrow \overline{MQ} = \sqrt{100} = 10$$