



۱- چهار نقطه $E = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $F = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $G = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ و $H = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ را پشت سر هم به ترتیب وصل می‌کنیم. مساحت چهارضلعی $EFGH$ چند است؟

۲۰ (۴)

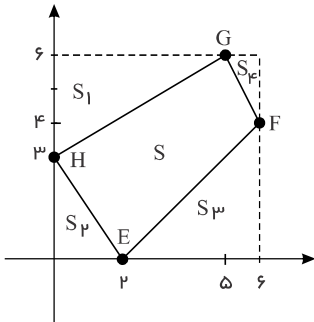
۱۶٫۵ (۳)

۳۰ (۲)

۱۹٫۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا نقاط را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و مساحت کل که یک مربع می‌باشد را به دست می‌آوریم و مساحت ۴ مثلث به دست آمده را کم می‌کنیم و مساحت $EFGH$ به دست می‌آید.



$$S_1 = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2}, \quad S_2 = \frac{2 \times 3}{2} = 3, \quad S_3 = \frac{4 \times 4}{2} = 8, \quad S_4 = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

$$\text{مساحت کل} = 6 \times 6 = 36$$

$$(S' \text{ مساحت } EFGH) = 36 - (3 + 8 + 1 + \frac{15}{2}) = 36 - (19.5) = 16.5$$

۲- قرینه‌ی نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ نسبت به محور طول‌ها کدام گزینه است؟

 $\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -4 \\ +3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (۵) $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ اگر بخواهیم نقطه‌ای را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم مؤلفه‌ی طول ثابت می‌ماند و مؤلفه‌ی عرض قرینه می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور طول‌ها}} \begin{bmatrix} +3 \\ +4 \end{bmatrix}$$

۳- دو نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} k-z \\ 2k+1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$ نسبت به محور طول‌ها قرینه‌ی یکدیگرند. مقدار k و z به ترتیب کدام گزینه است؟

۳، -۱ (۴)

-۳، -۱ (۳)

-۳، ۱ (۵)

۱، -۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ هر گاه دو نقطه نسبت به محور طول‌ها با هم قرینه باشند، مؤلفه‌ی طول آن‌ها با هم برابر و مؤلفه‌ی عرض آن‌ها قرینه‌ی یکدیگر است. بنابراین با توجه به این نکته داریم:

$$k - z = -4 \Rightarrow -(2k + 1) = 5 \Rightarrow -2k - 1 = 5 \Rightarrow -2k = +1 + 5 \Rightarrow -2k = 6 \Rightarrow k = -3$$

$$\Rightarrow k - z = -4 \Rightarrow -3 - z = -4 \Rightarrow -z = -4 + 3 = -1 \Rightarrow z = 1$$

۴- نقطه‌های $E = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $F = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $G = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ در دستگاه مختصات مفروض‌اند به طوری که داریم:

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{HG} \quad \text{در این صورت مختصات } H \text{ کدام گزینه است؟}$$

 $\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$ (۵) $\begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\overrightarrow{FE} = E - F = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{HG} = G - H = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - H = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow -H = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$



۵- $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ قرینه B نسبت به $N = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و N قرینه C نسبت به $D = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ است. قرینه B نسبت به C کدام است؟

- ① $\begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 37 \\ 26 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 15 \\ 13 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲ نکته: قرینه A نسبت به نقطه M : $B = 2M - A$

$$B = 2 \times N - A = 2 \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{مختصات } B$$

$$C = 2 \times D - N = 2 \times \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 13 \end{bmatrix} \quad \text{مختصات } C$$

$$2C - B = 2 \times \begin{bmatrix} 15 \\ 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 26 \end{bmatrix}$$

۶- نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ را توسط بردار $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ ده بار متوالی انتقال می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی بدست آمده کدام گزینه است؟

- ① $\begin{bmatrix} -9 \\ -62 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -9 \\ 62 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 9 \\ 62 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 9 \\ -62 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲ وقتی بردار انتقال $\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ ده بار متوالی تکرار می‌شود یعنی: $10 \times \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 60 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 62 \end{bmatrix}$$

۷- نقطه $B = \begin{bmatrix} -5 \\ 19 \end{bmatrix}$ را پنج بار متوالی با بردار $\vec{n}$ انتقال دادیم و به نقطه $C = \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \end{bmatrix}$ رسیدیم. مختصات بردار $\vec{n}$ کدام است؟

- ① $\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{bmatrix} -10 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -25 \end{bmatrix} = 5 \times \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

۸- اگر دو بردار $\vec{C} = \begin{bmatrix} 5n-1 \\ n-3 \end{bmatrix}$ و $\vec{d} = \begin{bmatrix} 6n-7 \\ +3 \end{bmatrix}$ هم‌اندازه، هم‌جهت و موازی باشند، مختصات بردار $\vec{d}$ کدام است؟

- ① $\begin{bmatrix} 29 \\ 3 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 36 \\ 3 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

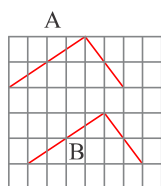
پاسخ: گزینه ۱ اگر دو بردار هم‌اندازه، هم‌جهت و موازی باشند آن دو بردار مساوی هستند و طول‌هایشان با هم و عرض‌هایشان با هم برابر است.

$$6n - 7 = 5n - 1 \rightarrow 6n - 5n = -1 + 7 \rightarrow n = +6$$

$$3 = n - 3 \rightarrow n = 6$$

چون جواب هر دو معادله با هم برابر است، قابل قبول می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} 6n-7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(6)-7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36-7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 3 \end{bmatrix}$$



- ① $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

۹- شکل A را با بردار $\vec{n}$ منتقل کردیم و به شکل B رسیدیم. مختصات بردار $\vec{n}$:

پاسخ: گزینه ۱ شکل یک واحد به سمت راست $x = 1$ و سه واحد به سمت پایین $y = -3$ منتقل شده است.

$$n = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

۱۰- قرینه‌ی نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به مبدأ مختصات برابر کدام گزینه است؟

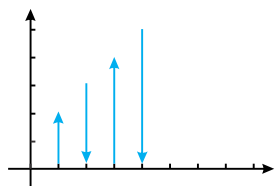
- ① $\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۳ در قرینه سازی یک نقطه نسبت به مبدأ مختصات، مؤلفه‌ی طول و عرض هر دو قرینه می‌شوند.

$$A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}} \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$



۱۱ - در شکل مقابل، با ادامه الگوی فلش‌ها، انتهای فلش هزار و سیصد و نود و هفتم کدام نقطه است؟



(۲) $\begin{bmatrix} 1398 \\ 1397 \end{bmatrix}$

(۴) $\begin{bmatrix} 1398 \\ 0 \end{bmatrix}$

(۱) $\begin{bmatrix} 1397 \\ 1396 \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} 1397 \\ 1398 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۳

مختصات انتهای فلش‌های اول و سوم و پنجم را می‌نویسیم:

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1397 \\ 1398 \end{bmatrix}$
اول سوم پنجم هزار و سیصد و نود و هفتم

۱۲ - بردار $\vec{b} = 3 \begin{bmatrix} n+2 \\ 3-3n \end{bmatrix}$ موازی محور طول‌ها است. مقدار n چقدر است؟

(۴) $-\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۲) -1

(۱) 1

پاسخ: گزینه ۱

$\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \times (n+2) \\ 3 \times (3-3n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3n+6 \\ 9-9n \end{bmatrix}$ موازی محور طول‌ها $9-9n=0 \Rightarrow -9n=-9 \Rightarrow n=1$

۱۳ - دو بردار $\vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ و $\vec{d} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ نسبت به هم:

(۴) هیچ‌کدام

(۳) موازی‌اند

(۲) عمودند

(۱) قرینه‌اند

پاسخ: گزینه ۳ موازی‌اند زیرا:

$\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{-3 \times \cancel{5}}{4 \times \cancel{5}} = \frac{6}{-8} = \frac{3}{-4}$

۱۴ - رضا در صفحه مختصات، مربعی به ضلع ۶ رسم کرده است که اضلاع آن با محورهای مختصات موازی‌اند و گوشه سمت چپ و بالا آن را B نامید. اگر

$B = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix}$ باشد، رضا بخواهد در هر مرحله گوشه‌های مربع را نصف و نسبت به مبدا قرینه کند تا مربع بعدی را به دست آورد. تعیین کنید کدام نقاط

بر گوشه مربع قرار نخواهد گرفت؟

(۴) $\begin{bmatrix} 0,625 \\ 1 \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0,625 \end{bmatrix}$

(۲) $\begin{bmatrix} 0,125 \\ 1 \end{bmatrix}$

(۱) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲

$\begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2,5 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$
شکل اولیه $\rightarrow$ مرحله اول $\rightarrow$ مرحله دوم

$\begin{bmatrix} -1,25 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0,625 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
مرحله سوم $\rightarrow$ مرحله چهارم



۱۵- نقطه $B = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}$ را در دستگاه مختصات مشخص کردیم. سپس مبدا مختصات را از $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ به $O' = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ منتقل کردیم. مختصات جدید نقطه B در دستگاه مختصات جدید، کدام است؟

- ① $\begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 4 \\ 14 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۱ نکته: در انتقال مختصات از $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ به $O' = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ مختصات جدید نقطه A به صورت زیر می‌شود.

$$-(m) \text{ طول قدیم } A = \text{طول جدید } A$$

$$-(n) \text{ عرض قدیم } A = \text{عرض جدید } A$$

$$\text{عرض مبدا جدید } B = \begin{bmatrix} 11 - (-3) \\ 7 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix}$$

۱۶- قرینه $\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$ نسبت به مبدا مختصات به صورت $\begin{bmatrix} 3a - 9 \\ 2 - b \end{bmatrix}$ می‌باشد. مقدار $2a + b$ کدام است؟

- ① ۰ ② ۲ ③ -۵ ④ -۱

پاسخ: گزینه ۴ نکته: قرینه نقطه $C = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به مبدا مختصات می‌شود: $C' = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$

$$\text{طول: } 3 = -(3a - 9) \Rightarrow 3 = -3a + 9 \Rightarrow 3 - 9 = -3a \Rightarrow -6 = -3a \Rightarrow a = 2$$

$$\text{عرض: } -7 = -(2 - b) \Rightarrow -7 = -2 + b \Rightarrow -7 + 2 = b \Rightarrow b = -5$$

$$2a + b = 2(2) + (-5) = -1$$

۱۷- به ازای چه مقدار m ، فاصله نقطه $A = \begin{bmatrix} 7m + 2 \\ 6m - 1 \end{bmatrix}$ از محورهای مختصات به یک اندازه است؟

- ① -۲ ② ۳ ③ -۳ ④ ۱

پاسخ: گزینه ۳ اگر نقطه‌ای دارای طول و عرض مساوی باشد یا دارای طول و عرض قرینه باشد، فاصله‌اش از محورهای مختصات به یک فاصله است.

$$7m + 2 = 6m - 1 \rightarrow 7m - 6m = -1 - 2 \rightarrow m = -3$$

$$7m + 2 = -(6m - 1) \rightarrow 13m = -1 \rightarrow m = -\frac{1}{13} \text{ در گزینه‌ها نیست}$$

۱۸- نقطه $C \mid \begin{matrix} x - y \\ 2x + 1 \end{matrix}$ به ازای چه مقداری از y روی محور عرض‌ها و به عرض -۳ می‌باشد؟

- ① -۲ ② +۲ ③ ۴ ④ -۴

پاسخ: گزینه ۱ نکته: اگر نقطه‌ای روی محور عرض باشد، عرض دارد و طولش صفر است و اگر نقطه‌ای روی محور طول باشد طول دارد ولی عرضش صفر است.

فرض مسئله

$$\rightarrow 2x + 1 = -3 \rightarrow 2x = -3 - 1 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2$$

روی محور عرض

$$\rightarrow x - y = 0 \rightarrow x = y \rightarrow x = y = -2$$

۱۹- قرینه نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ نسبت به محور عرض‌ها کدام گزینه است؟

- ① $\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} +4 \\ +3 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۱ در قرینه‌ی یک نقطه نسبت به محور عرض‌ها مؤلفه‌ی عرض ثابت می‌ماند و مؤلفه‌ی طول قرینه می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}} \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

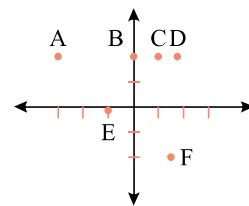
۲۰- چند مثلث وجود دارند که رأس‌هایشان از نقطه‌های $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ انتخاب شده است؟

- ① ۸ ② ۲۰ ③ ۱۲ ④ ۱۶

پاسخ: گزینه ۴ طبق شکل زیر داریم:



$$A = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$



اگر پاره‌خط‌های به‌وجود آمده از ۴ نقطه A, B, C, D که در امتداد یک خط هستند را به هر کدام از نقطه‌های E و F وصل کنیم، تعداد مثلث‌ها برابر است با: مثلث

$$\frac{3 \times 4}{2} = 6 \Rightarrow 6 \times 2 = 12$$

درضمن اگر پاره‌خط EF را به هر کدام از نقاط A, B, C, D وصل کنیم تعداد مثلث ۵ برابر است با: $4 = 4 \times 1$ پس تعداد کل مثلث‌ها برابر ۱۶ می‌شود.

۲۱- اگر $A = \begin{bmatrix} -2m+4 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} m-2 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\vec{AB}$ موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد، مقدار m کدام است؟

$$\textcircled{1} \frac{13}{3} \quad \textcircled{2} \frac{-1}{3} \quad \textcircled{3} \frac{13}{3}, \frac{-1}{3} \quad \textcircled{4} 2$$

پاسخ: گزینه ۱ اگر $\vec{AB}$ موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد، آن‌گاه طول و عرض این بردار برابرند. پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} y_{\vec{AB}} &= y_B - y_A = 4 - (-3) = 7 \\ x_{\vec{AB}} &= x_B - x_A = m - 2 - (-2m + 4) = 3m - 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3m - 6 = 7 \Rightarrow 3m = 13 \Rightarrow m = \frac{13}{3}$$

۲۲- چند عدد صحیح می‌توان به جای t قرار داد تا نقطه $E = \begin{bmatrix} t^2 - 81 \\ t - 4 \end{bmatrix}$ در ناحیه دوم محورهای مختصات قرار گیرد؟

$$\textcircled{1} 17 \quad \textcircled{2} 19 \quad \textcircled{3} 4 \quad \textcircled{4} 6$$

پاسخ: گزینه ۳ شرط آن‌که نقطه E در ناحیه دوم قرار گیرد، آن است که طول منفی و عرض مثبت باشد.

$$\left. \begin{aligned} t^2 - 81 < 0 &\Rightarrow t^2 < 81 \Rightarrow -9 < t < 9 \\ t - 4 > 0 &\Rightarrow t > 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 < t < 9 \Rightarrow t = 5, 6, 7, 8$$

۲۳- نقطه $T = \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$ در کدام ناحیه محورهای مختصات قرار دارد؟

$$\textcircled{1} 1 \quad \textcircled{2} 3 \quad \textcircled{3} 2 \quad \textcircled{4} 4$$

پاسخ: گزینه ۲ نقطه‌ای که طول و عرض آن منفی باشد در ناحیه سوم محورهای مختصات قرار دارد.

$$1 - \sqrt{3} < 0, 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} < 0 \Rightarrow T \text{ در ناحیه سوم قرار دارد}$$

۲۴- کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد بردارهای $\begin{bmatrix} 9 \\ -10 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$ درست است؟

$$\textcircled{1} \text{ هم جهت نیستند ولی موازی هستند.} \quad \textcircled{2} \text{ هم جهت و موازی هستند.} \quad \textcircled{3} \text{ قرینه یکدیگر هستند.} \quad \textcircled{4} \text{ بر هم عمود هستند.}$$

پاسخ: گزینه ۱ این دو بردار موازی و غیرهم جهت هستند، زیرا نسبت طول به عرض آن‌ها یکسان است اما علامت طول و عرضشان قرینه همدیگر است.

$$\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{3}} = \frac{-9}{10} \Rightarrow \frac{9}{10} = -\frac{9}{10}$$

۲۵- نقاط $A = \begin{bmatrix} a \\ 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 \\ a-1 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر وسط پاره‌خط AB روی محور طول‌ها باشد، a کدام است؟

$$\textcircled{1} 4 \quad \textcircled{2} -1 \quad \textcircled{3} -2 \quad \textcircled{4} -4$$

پاسخ: گزینه ۳

$$M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M = \left(\begin{bmatrix} a \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ a-1 \end{bmatrix} \right) \div 2 = \begin{bmatrix} a+4 \\ a+2 \end{bmatrix} \div 2 = \begin{bmatrix} \frac{a+4}{2} \\ \frac{a+2}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{روی محور طول‌ها}} \frac{a+2}{2} = 0 \Rightarrow a = -2$$



۲۶- اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} -3x+2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} x-1 \\ -2 \end{bmatrix}$ موازی باشند، مقدار x^{-1} کدام است؟

- ① ۳ ② ۴ ③ -۵ ④ $\frac{1}{5}$

پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم که نسبت طول‌های دو بردار موازی، برابر نسبت عرض آن‌ها است. پس داریم:

$$\frac{-3x+2}{x-1} = \frac{3}{-2} \Rightarrow -2(-3x+2) = 3(x-1) \Rightarrow 6x-4 = 3x-3 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

از آن‌جا که برای تبدیل توان منفی به مثبت، عدد را معکوس می‌کنیم، داریم:

$$x^{-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

۲۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 2m-1 \\ 1-m \end{bmatrix}$ همواره در ناحیه اول دستگاه مختصات باشد، m در کدام رابطه زیر صدق می‌کند؟

- ① $-\frac{1}{2} < m < 1$ ② $\frac{1}{2} < m < 1$ ③ $1 < m < 2$ ④ $\frac{1}{2} < m < 2$

پاسخ: گزینه ۲ در ناحیه اول دستگاه مختصات، طول عرض مثبت هستند؛ پس نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$2m-1 > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2}, 1-m > 0 \Rightarrow m < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < m < 1$$

۲۸- اگر $\vec{x}$ یک بردار « $x > 0$ » و $-1 < n < 0$ یک عدد حقیقی باشد، کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

- ① بردار $n\vec{x}$ و بردار $\vec{x}$ هم‌جهت هستند و طول $n\vec{x}$ از طول $\vec{x}$ کوچک‌تر است. ② بردار $n\vec{x}$ و بردار $\vec{x}$ مختلف‌الجهت هستند و طول $n\vec{x}$ از طول $\vec{x}$ کوچک‌تر است.
③ بردار $n\vec{x}$ و بردار $\vec{x}$ هم‌جهت هستند و طول $n\vec{x}$ از طول $\vec{x}$ بزرگ‌تر است. ④ بردار $n\vec{x}$ و بردار $\vec{x}$ مختلف‌الجهت هستند و طول $n\vec{x}$ از طول $\vec{x}$ بزرگ‌تر است.

پاسخ: گزینه ۲ پاسخ منتهی:

چون n منفی است علامت بردار x ، $n\vec{x}$ خلاف یکدیگر می‌باشد و چون مقدار عددی n بین صفر و یک است با ضرب در x ، مقدار x را کمتر می‌کند.

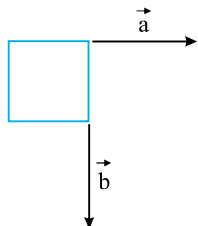
۲۹- اگر رابطه $\vec{BA} + \vec{CA} = \vec{0}$ برقرار باشد، کدام گزینه صحیح است؟

- ① دو بردار $\vec{BA}$ و $\vec{CA}$ موازی اند. ② دو نقطه B و C برهم منطبق اند. ③ دو بردار $\vec{BA}$ و $\vec{CA}$ قریب‌اند. ④ گزینه ۱ و ۳ صحیح است.

پاسخ: گزینه ۳



۳۰- در شکل روبه‌رو مربعی به ضلع ۲ واحد رسم شده است. دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با اندازه ۲ واحد و موازی با دو ضلع مربع مفروض‌اند. مربع را ابتدا با بردار $\vec{a}$ انتقال می‌دهیم. سپس شکل جدید را با بردار $\vec{b}$ دوباره منتقل می‌کنیم. با برداری فاصله بین دورترین نقاط روی مربع نهایی و مربع اولیه را به هم وصل می‌کنیم. اندازه این بردار چه قدر است؟



- ① $4\sqrt{13}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ ۴ ④ $2\sqrt{5}$

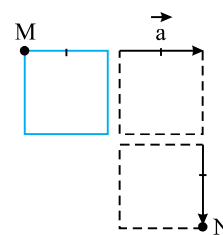
پاسخ: گزینه ۲

انتقال مربع به شکل زیر انجام می‌شود: MN دورترین نقاط شکل اولیه تا شکل انتقال یافته است؛ با توجه به شکل:



$$\vec{MN} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$|\vec{MN}| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$$



۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ دو رأس مقابل یک مربع باشند، مساحت مربع کدام است؟

۲۵ (۴)

۱۲٫۵ (۳)

۱۲ (۷)

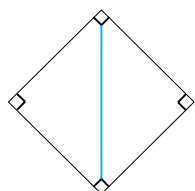
۶٫۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

اگر دو رأس مقابل را وصل کنیم، قطر مربع به دست می‌آید (نه ضلع!) و مساحت مربع را از راه لوزی به دست می‌آوریم.

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$



$$S = \frac{5 \times 5}{2} = 12,5$$

$$B \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۳۲- b چند باشد تا بردار $\begin{bmatrix} 2,5 \\ 3 \end{bmatrix}$ نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ را به نقطه $\begin{bmatrix} 3,5 \\ 2b+1 \end{bmatrix}$ منتقل کند؟

$-\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$-\frac{3}{2}$ (۷)

$\frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3,5 \\ 2b+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 5 + 2b + 1 = 3 \Rightarrow 2b + 6 = 3$$

$$\Rightarrow 2b = 3 - 6 \Rightarrow 2b = -3 \Rightarrow b = \frac{-3}{2}$$

۳۳- اگر $C' = \begin{bmatrix} 2n-1 \\ m+n-1 \end{bmatrix}$ انتقال یافته $C = \begin{bmatrix} 3m+1 \\ 4n-3 \end{bmatrix}$ تحت بردار $\vec{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\frac{2mn}{m-n}$ کدام است؟

$\frac{-325}{42}$ (۴)

$\frac{-12}{7}$ (۳)

$\frac{-25}{7}$ (۷)

$\frac{300}{208}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$C + \vec{d} = C' \Rightarrow \begin{bmatrix} 3m+1 \\ 4n-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n-1 \\ m+n-1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3m+1+5=2n-1 \Rightarrow 3m-2n=-7 \\ 4n-3+4=m+n-1 \Rightarrow 4n-n-m=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3m-2n=-7) \times 3 \\ (3n-m=-2) \times 2 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 9m-6n=-21 \\ -2m+6n=-4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{7m=-25}{7m=-25} \Rightarrow m = \frac{-25}{7}$$

$$\xrightarrow{\text{جگذاری}} 3n - (-\frac{25}{7}) = -2 \Rightarrow 3n + \frac{25}{7} = -2$$

$$\Rightarrow 3n = -2 - \frac{25}{7} = \frac{-14-25}{7} = \frac{-39}{7} \Rightarrow n = \frac{-13}{7}$$



$$\frac{2mn}{m-n} = \frac{2\left(\frac{-25}{v}\right)\left(\frac{-13}{v}\right)}{\frac{-25}{v} + \frac{13}{v}} = \frac{\frac{325}{v \times v}}{\frac{-12}{v}} = \frac{-325}{42}$$

۳۴- اندازه بردار $\vec{C} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ برابر است با:

④ $\sqrt{15}$

③ $\sqrt{17}$

② $\sqrt{3}$

① $\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه ۳ طول بردار $\vec{C} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$

$$|\vec{C}| = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

۳۵- نقطه $C = \begin{bmatrix} 3z + 1 \\ 2 - v \end{bmatrix}$ روی محور عرض و نقطه $D = \begin{bmatrix} z + \frac{v}{3} \\ 4v - 3 \end{bmatrix}$ روی محور طول واقع شده است. مختصات $\overrightarrow{CD}$ برابر است با:

④ $\begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 3 \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\text{روی محور عرض} \rightarrow 3z + 1 = 0 \Rightarrow 3z = -1 \Rightarrow z = \frac{-1}{3}$$

$$\text{روی محور طول} \rightarrow 4v - 3 = 0 \Rightarrow 4v = 3 \Rightarrow v = \frac{3}{4}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3\left(\frac{-1}{3}\right) + 1 \\ 2 - \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} + \frac{v}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = D - C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

۳۶- بردار $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ را ابتدا نسبت به محور عرض قرینه و سپس بردار حاصل را نسبت به محور طولها قرینه کرده ایم، مختصات بردار حاصل کدام گزینه است؟

④ $\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۱ نکته: قرینه بردار $\vec{b} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به محور طول $\vec{b} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ و نسبت به محور عرض $\vec{b} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$ می شود.

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{به محور عرض}]{\text{قرینه نسبت}} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{به محور طول}]{\text{قرینه نسبت}} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

۳۷- نقطه $N = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ را به کدام یک از گزینه های زیر وصل کنیم تا بردار به وجود آمده، موازی محور عرض شود؟

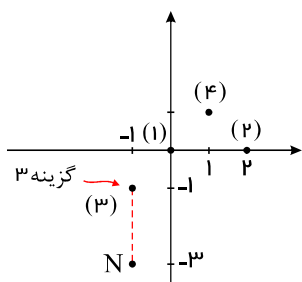
④ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۳





۳۸- یک شش ضلعی منتظم داریم که مختصات مرکز شش، $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ است. مجموع مختصات های شش رأس کدام است؟

- ① $\begin{bmatrix} 12 \\ 18 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 18 \\ 12 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 12 \\ 20 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۳ در هر n ضلعی منتظم، مجموع مختصات n رأس با n برابر مختصات مرکز آن برابر است.

$$6 \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \end{bmatrix}$$

۳۹- متوازی الاضلاعی دارای دو رأس روبه روی هم به صورت $N = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $M = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}$ می باشد. مختصات مرکز این شکل کدام گزینه است؟

- ① $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲ در متوازی الاضلاع، قطر ها یکدیگر را نصف می کنند. پس مرکز متوازی الاضلاع، وسط هر قطر است.

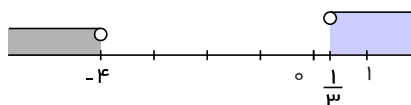
$$O = \frac{N + M}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

۴۰- اگر $x = \begin{bmatrix} 3n - 1 \\ n + 4 \end{bmatrix}$ همواره در ناحیه سوم دستگاه مختصات باشد، n در کدام گزینه صدق میکند؟

- ① $n > 4$ ② $n < -4$ ③ $\frac{1}{3} < n < 4$ ④ $n > -4$

پاسخ: گزینه ۲ در ناحیه سوم مختصات، هم طول و هم عرض منفی است. پس نامساوی های زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} (1) \quad 3n - 1 < 0 &\Rightarrow 3n < 1 \Rightarrow n < \frac{1}{3} \\ (2) \quad n + 4 > 0 &\Rightarrow n > -4 \end{aligned} \xrightarrow{(1), (2)} n < -4$$



۴۱- بردارهای $\begin{bmatrix} -28 \\ 32 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 32x - 4 \\ 12 - 10y \end{bmatrix}$ نسبت به محور عرض ها قرینه اند. مقدار $x + y$ برابر است با:

- ① -۱ ② ۲ ③ -۲ ④ صفر

پاسخ: گزینه ۱ اگر دو بردار نسبت به محور عرض ها قرینه باشند دارای مؤلفه های عرض یکسان و مؤلفه های طول قرینه می باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 32x - 4 = -(-28) \\ 12 - 10y = 32 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 32x - 4 = 28 \\ -10y = -12 + 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32x = 32 \rightarrow x = 1 \\ -10y = 20 \rightarrow y = -2 \end{cases} \Rightarrow x + y = 1 + (-2) = -1$$

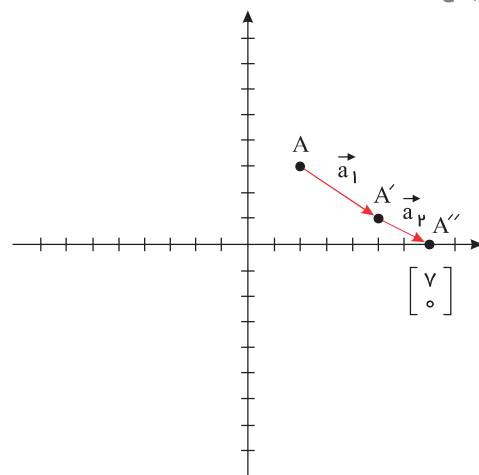
۴۲- نقطه ی $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ را با بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ و سپس با $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ انتقال دادیم. مختصات نقطه ی جدید برابر است با:

- ① $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$



پاسخ: گزینه ۴

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$



۴۳- اگر نقطه‌ی $S = \begin{bmatrix} 4m + 3 \\ 9 - 2m \end{bmatrix}$ از محورهای مختصات به یک فاصله باشد، مختصات نقطه‌ی S کدام گزینه است؟

- ① $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -7 \\ -7 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۳ برای این که نقطه‌ای از محورهای مختصات به یک فاصله باشد باید مؤلفه‌های طول و عرض آن با هم برابر باشد.

بنابراین:

$$4m + 3 = 9 - 2m \Rightarrow 4m + 2m = -3 + 9 \Rightarrow 6m = 6 \Rightarrow m = 1$$

$$S = \begin{bmatrix} 4 \times 1 + 3 \\ 9 - 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

۴۴- اگر طول نقطه‌ی $H = \begin{bmatrix} -2 - 4m \\ m - 3 \end{bmatrix}$ دو برابر عرض آن باشد، قرینه‌ی این نقطه نسبت به محور عرض‌ها کدام گزینه است؟

- ① $\begin{bmatrix} 14 \\ -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -\frac{14}{3} \\ -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{14}{3} \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -\frac{14}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۱

$$H = \begin{bmatrix} -2 - 4m \\ m - 3 \end{bmatrix}$$

$$-2 - 4m = 2(m - 3) \Rightarrow -2 - 4m = 2m - 6 \Rightarrow -4m - 2m = -6 + 2 \Rightarrow -6m = -4 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$$

$$H = \begin{bmatrix} -2 - 4 \times \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{3} \\ -\frac{7}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه‌ی این نقطه نسبت به محور عرض‌ها}} \begin{bmatrix} +\frac{14}{3} \\ -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

۴۵- با توجه به مختصات $A = \begin{bmatrix} m - 2 \\ 3m - 6 \end{bmatrix}$ به ازاء کدام مقدار m نقطه‌ی A روی محور طول‌ها است؟

- ① -2 ② 3 ③ $+2$ ④ -3

پاسخ: گزینه ۳ نقاطی روی محور طول‌ها قرار می‌گیرند که دارای عرض صفر باشند.

$$3m - 6 = 0 \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2$$

۴۶- دو نقطه‌ی $M = \begin{bmatrix} 2a - 1 \\ a + b \end{bmatrix}$ و $N = \begin{bmatrix} 3 - a \\ b - 2 \end{bmatrix}$ نسبت به مبدأ مختصات قرینه‌ی یکدیگرند. مختصات نقطه‌ی M و N کدام است؟

- ① $M = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ② $M = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ③ $M = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$ ④ $M = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $N = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲ اگر دو نقطه نسبت به مبدأ مختصات قرینه‌ی یکدیگر باشند مؤلفه‌ی طول و عرض آن‌ها قرینه‌ی یکدیگر خواهد بود. بنابراین:



$$M = -N$$

$$\begin{bmatrix} 2a-1 \\ a+b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3-a \\ b-2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2a-1 = -3+a \Rightarrow 2a-a = -3+1 \Rightarrow a = -2$$

$$a+b = -b+2 \Rightarrow -2+b+b = 2 \Rightarrow 2b = +2+2 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$M = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} +5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۴۷- اگر نقطه‌های $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ z-3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5v+1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ نسبت به محور عرض‌ها قرینه باشد، z و v برابرند با:

۱) ۰ و ۱

۲) ۰ و ۰

۳) ۰ و ۱

۴) ۰ و ۲

پاسخ: گزینه ۱ نکته: قرینه نقطه $A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به محور طول $A' = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ می‌شود و همچنین قرینه نقطه A نسبت به محور عرض $\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$ می‌شود.

$$\text{طول: } \frac{5v+1}{\cancel{y}} = - \left(-\frac{1}{\cancel{2}} \right) = \frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow 5v+1 = 1 \Rightarrow 5v = 1-1 \Rightarrow v = 0$$

$$\text{عرض: } z-3 = -4 \Rightarrow z = -4+3 \Rightarrow z = -1$$

۴۸- نقطه‌ی $E = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}$ را با کدام بردار زیر می‌توان به مبدأ مختصات انتقال داد؟

۱) $\begin{bmatrix} -10 \\ -1 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به رابطه: ابتدای بردار + طول بردار = انتهای بردار، می‌توان این طور نتیجه گرفت که اگر نقطه‌ی E ابتدای بردار انتقال باشد و مبدأ مختصات انتهای بردار پس مختصات بردار انتقال این گونه محاسبه می‌شود:

$$\vec{EO} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{EO} = \begin{bmatrix} -10 \\ +1 \end{bmatrix}$$

۴۹- بردار $\vec{k} = \begin{bmatrix} x+6 \\ x-2 \end{bmatrix}$ موازی محور عرض‌هاست. مقدار $\vec{k}$ برابر است با:

۱) $\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲ اگر برداری موازی محور عرض‌ها باشد طول آن صفر است.
بنابراین مقدار $\vec{k}$:

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} x+6 \\ x-2 \end{bmatrix}$$

$$x+6 = 0 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

۵۰- اگر نقطه $A = \begin{bmatrix} m+3 \\ 2m-10 \end{bmatrix}$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات قرار داشته باشد، کدام رابطه درست است؟

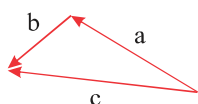
۱) $-3 < m < 5$

۲) $m > 5$

۳) $m < -3$

۴) چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم که در ناحیه دوم طول منفی $x < 0$ و عرض مثبت $y > 0$ است. اما در نقطه A این دو شرط با هم امکان ندارد. چون اگر طول بخواهد منفی شود باید $m < -3$ باشد و اگر عرض مثبت شود باید $m > 5$ شود که هر دو با هم امکان‌پذیر است.



۵۱- مطابق شکل روبه‌رو جمع بردارهای $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ برابر است با:

۱) بردار صفر

۲) $2\vec{c}$

۳) $-2\vec{c}$

۴) $2\vec{a}$

پاسخ: گزینه ۲ با توجه به قانون مثلث حاصل جمع $\vec{a}$, $\vec{b}$, بردار $\vec{c}$ است پس خواهیم داشت:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{c} + \vec{c} = 2\vec{c}$$

۵۲- اگر دو بردار $\vec{z}$ و $\vec{n}$ هم‌اندازه، موازی و هم‌جهت باشند، $\vec{z} = \begin{bmatrix} 8x+16 \\ 2y+2 \end{bmatrix}$ و $\vec{n} = \begin{bmatrix} 2x-2 \\ -4 \end{bmatrix}$ آن‌گاه مختصات بردار $\vec{n}$ کدام گزینه

۱) $\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$

ست؟



پاسخ: گزینه ۲ دو بردار هم‌اندازه، موازی و هم‌جهت دو بردار مساوی خواهند بود که در بردارهای مساوی مؤلفه‌های طول باهم و مؤلفه‌های عرض باهم برابر باشند. با توجه به این اصل خواهیم داشت:

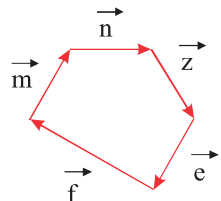
$$\vec{n} = \vec{z}$$

$$\begin{bmatrix} 2x - 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x + 16 \\ 2y + 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x - 2 = 8x + 16 \Rightarrow 2x - 8x = 16 + 2 \Rightarrow -6x = 18 \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

با جای‌گذاری x ، مختصات بردار $\vec{n}$ را بدست می‌آوریم:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 2(-3) - 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 - 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

۵۳- مجموع برداری شکل مقابل برابر کدام است؟



$$\vec{c} \quad \textcircled{2}$$

$$\vec{o} \quad \textcircled{4}$$

$$\vec{f} \quad \textcircled{1}$$

$$\vec{m} \quad \textcircled{3}$$

پاسخ: گزینه ۴

مجموع برداری شکل، بردار صفر خواهد بود.

$$\vec{m} + \vec{n} + \vec{z} + \vec{e} = -\vec{f}$$

$$\vec{f} + (-\vec{f}) = \vec{o}$$

۵۴- بردارهای $\vec{k} = \begin{bmatrix} 3x - 12 \\ 9y - 12 \end{bmatrix}$ و $\vec{x} = \begin{bmatrix} 6x - 18 \\ 15y + 6 \end{bmatrix}$ باهم مساوی‌اند. x و y به ترتیب برابرند با:

$$4, -6 \quad \textcircled{4}$$

$$-3, 4 \quad \textcircled{3}$$

$$-3, -6 \quad \textcircled{2}$$

$$-3, 2 \quad \textcircled{1}$$

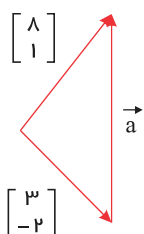
پاسخ: گزینه ۱

$$\vec{x} = \vec{k}$$

$$\begin{bmatrix} 6x - 18 \\ 15y + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 12 \\ 9y - 12 \end{bmatrix}$$

$$6x - 18 = 3x - 12 \Rightarrow 6x - 3x = 18 - 12 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$$

$$15y + 6 = 9y - 12 \Rightarrow 15y - 9y = -6 - 12 \Rightarrow 6y = -18 \Rightarrow y = -3$$



$$\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \textcircled{4}$$

$$\begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \textcircled{3}$$

۵۵- با توجه به شکل، مختصات بردار a کدام است؟

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به روش مثلثی داریم:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \vec{a} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} 8 - 3 \\ 1 - (-2) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۵۶- اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ باشد می‌توان گفت:

۴ هر گزینه درست است. $\textcircled{4}$

$$\vec{b} = -\vec{a} \quad \textcircled{3}$$

$$\vec{a} = -\vec{b} \quad \textcircled{2}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{o} \quad \textcircled{1}$$

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به مختصات هر بردار دو بردار، هم‌اندازه و خلاف جهت هم می‌باشند.

۵۷- در بردارهای $\vec{a} = \begin{bmatrix} m - 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} n + 2m \\ 1 - m \end{bmatrix}$ اگر رابطه $\vec{a} + \vec{b} = \vec{o}$ برقرار باشد مقدار m و n مطابق با کدام گزینه است؟

$$\begin{cases} m = 5 \\ n = 4 \end{cases} \quad \textcircled{4}$$

$$\begin{cases} m = -8 \\ n = 3 \end{cases} \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{cases} m = 3 \\ n = -8 \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{cases} m = 2 \\ n = -7 \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ وقتی مجموع دو بردار صفر باشد آن دو بردار قرینه‌ی یکدیگرند.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{o}$$

$$\begin{bmatrix} m - 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n + 2m \\ 1 - m \end{bmatrix} = \vec{o} \quad 2 + 1 - m = 0 \Rightarrow 3 - m = 0 \Rightarrow -m = -3 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$



$$m - 1 + n + 2m = 0 \Rightarrow 3m - 1 + n = 0 \Rightarrow 3 \times 3 - 1 + n = 0 \Rightarrow 9 - 1 + n = 0$$

$$\Rightarrow 8 + n = 0 \Rightarrow \boxed{n = -8}$$

۵۸- اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} m \\ 2m+1 \end{bmatrix}$ باشند و بدانیم حاصل جمع آن‌ها در امتداد محور عرض‌ها می‌باشد. آن‌گاه $\vec{a} + \vec{b}$ برابر است با:

- ① $\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۳ چون حاصل جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در امتداد محور عرض‌هاست پس طول برابر صفر است.

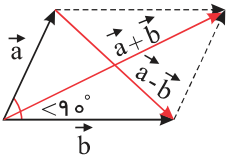
یعنی: $5 + m = 0$ پس $m = -5$ و عرض بردار $\vec{b} = 2 \times -5 + 1 = -9$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

۵۹- در روش متوازی‌الاضلاع در جمع بردارها، اگر زاویه‌ی بین دو بردار کمتر از 90° درجه باشد، آن‌گاه:

- ① بردار قطر بزرگ متوازی‌الاضلاع، تفاضل دو بردار است.
② بردار قطر کوچک متوازی‌الاضلاع، تفاضل دو بردار است.
③ بردار قطر بزرگ متوازی‌الاضلاع، الزاماً از ضرب یک عدد طبیعی در هر یک از بردارها بدست می‌آید.
④ گزینه‌ی ۲ و ۳ صحیح است.

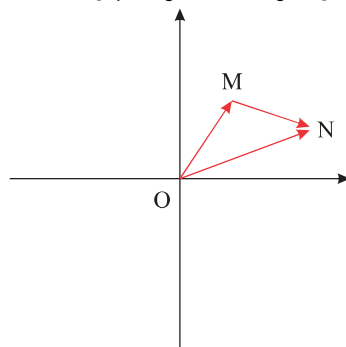
پاسخ: گزینه ۲



۶۰- اگر بردار OM و ON مفروض باشند، مختصات بردار MN چیست؟

- ① $\vec{OM} + \vec{ON}$ ② $\vec{OM} - \vec{ON}$ ③ $\vec{ON} - \vec{OM}$ ④ $\vec{ON} + \vec{OM}$

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به شکل ملاحظه می‌کنیم که جمع دو بردار OM و MN به روش مثلثی برابر $\vec{ON}$ می‌شود، پس:



$$\begin{aligned} \vec{OM} + \vec{MN} &= \vec{ON} \\ \rightarrow \vec{MN} &= \vec{ON} - \vec{OM} \end{aligned}$$

۶۱- بردارهای $\vec{m} = \begin{bmatrix} 3x-5 \\ y+2 \end{bmatrix}$ و $\vec{n} = \begin{bmatrix} 2x-1 \\ 3y-4 \end{bmatrix}$ با هم مساویند. x و y به ترتیب در کدام گزینه‌ها آمده است؟

- ① ۳ و ۴ ② ۱ و ۶ ③ ۴ و ۱ ④ ۶ و ۳

پاسخ: گزینه ۱

$$\vec{m} = \vec{n}$$

$$\begin{bmatrix} 3x-5 \\ 3y-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-1 \\ y+2 \end{bmatrix}$$

$$3x-5 = 2x-1 \Rightarrow 3x-2x = +5-1 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

$$3y-4 = y+2 \Rightarrow 3y-y = 4+2 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow \boxed{y=3}$$



۶۲- مقدار x را طوری پیدا کنید که دو بردار $\begin{bmatrix} x-6 \\ 6 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x \\ -3 \end{bmatrix}$ موازی باشند.

۴) +۲

۳) -۳

۷) ۳

۱) -۲

پاسخ: گزینه ۴ برای موازی بودن دو بردار بایستی نسبت بین مؤلفه‌های طول و عرض بردارها با هم مساوی باشند.

$$\frac{x}{-3} = \frac{x-6}{6} \Rightarrow 6x = -3x + 18 \Rightarrow 9x = 18 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

۶۳- اگر در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، $\vec{AB} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\vec{BC} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix}$ باشد مختصات $\vec{CD}$ برابر است با:

۴) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

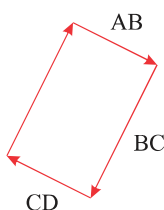
۷) $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

۱) $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

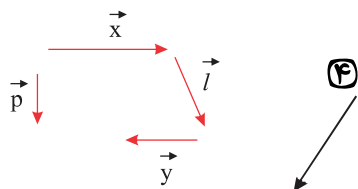
پاسخ: گزینه ۲

در متوازی‌الاضلاع مذکور بردار $\vec{CD}$ ، قرینه‌ی بردار $\vec{AB}$ می‌باشد پس:

$$\vec{CD} = \begin{bmatrix} -4 \\ +2 \end{bmatrix}$$



۶۴- حاصل جمع بردارهای مقابل برابر کدام گزینه است؟



۴)

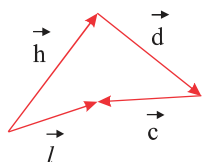
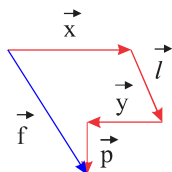
۳)

۷)

۱)

پاسخ: گزینه ۲

یک بردار را انتخاب کرده و بقیه‌ی بردارها را بصورت متوالی از انتهای آن رسم می‌کنیم و طبق شکل بردار مجموع بردار $\vec{f}$ خواهد بود.



۶۵- حاصل جمع چهار بردار روبرو کدام است؟

۷) $\vec{d}$

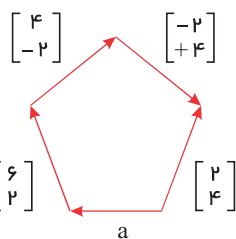
۴) بردار صفر

۱) $2\vec{l}$

۳) $\vec{l}$

پاسخ: گزینه ۱

$$(\vec{h} + \vec{d} + \vec{c}) + \vec{l} = +\vec{l} + \vec{l} = 2\vec{l}$$



۶۶- در شکل مقابل مختصات بردار $\vec{a}$ کدام است؟

۷) $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

۱) $\begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۱ با توجه به اینکه بردار برآیند (مجموع) بردارایست که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل می‌کند بنابراین در این شکل بردار مجموع $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ خواهد بود.

$$\vec{a} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} + \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

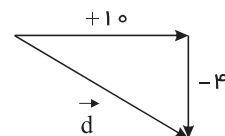


۶۷- اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\vec{c} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، شکل بردار $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ شبیه کدام گزینه است؟

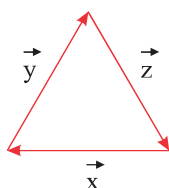


پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{aligned}\vec{d} &= 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \\ \vec{d} &= 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 2 \times \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8+6-4 \\ -4-2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$



۶۸- در شکل مقابل حاصل $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ کدام گزینه است؟

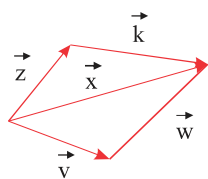


☐ ۱ $2\vec{z}$
☐ ۲ $\vec{x} = (\vec{y} + \vec{z})$
☐ ۳ $\vec{z}$
☐ ۴ $\vec{x}$

☐ ۱ $2\vec{x}$
☐ ۲ $\vec{0}$
☐ ۳ $\vec{0}$
☐ ۴ $\vec{0}$

پاسخ: گزینه ۳ حاصل جمع بردارها برابر بردار صفر است.

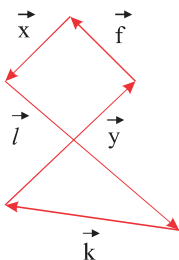
۶۹- در شکل مقابل بردار $\vec{x}$ برابر با کدام گزینه است؟



☐ ۱ $\vec{k} + \vec{w}$
☐ ۲ $\vec{z} + \vec{k}$
☐ ۳ $\vec{k} - \vec{w}$
☐ ۴ $\vec{k} - \vec{w}$

☐ ۱ $2\vec{k} - \vec{w}$
☐ ۲ $\vec{k} - \vec{w}$
☐ ۳ $\vec{k} - \vec{w}$
☐ ۴ $\vec{k} - \vec{w}$

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به قانون مثلثی در جمع بردارها حاصل جمع دو بردار $\vec{k} + \vec{z}$ برابر با بردار $\vec{x}$ خواهد بود. و همچنین $\vec{v} + \vec{w} = \vec{x}$ است اما در گزینه‌ها نیست.



۷۰- برآیند همی بردارهای شکل مقابل کدام است؟

☐ ۱ $\vec{0}$
☐ ۲ $\vec{0}$
☐ ۳ $\vec{0}$
☐ ۴ $\vec{0}$

☐ ۱ $\vec{x} + \vec{f}$
☐ ۲ $\vec{k} + \vec{y}$
☐ ۳ $\vec{k} + \vec{y}$
☐ ۴ $\vec{k} + \vec{y}$

پاسخ: گزینه ۲ با استفاده از قانون مثلثی مجموع کل بردارهای شکل صفر خواهد بود.

۷۱- اگر بردار $\vec{OM}$ و $\vec{ON}$ مفروض باشند، مختصات بردار $\vec{MN}$ چیست؟

☐ ۱ $\vec{OM} + \vec{ON}$

☐ ۲ $\vec{OM} - \vec{ON}$

☐ ۳ $\vec{ON} - \vec{OM}$

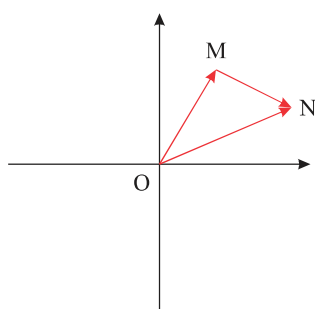
☐ ۴ $\vec{ON} + \vec{OM}$

پاسخ: گزینه ۳

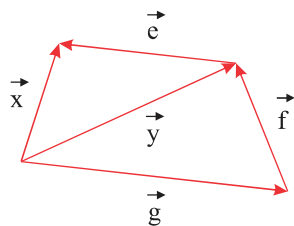
مطابق شکل همان طور که مشاهده می‌کنید:

جمع دو بردار $\vec{OM}$ و $\vec{MN}$ به روش مثلثی برابر $\vec{ON}$ می‌شود.

$$\vec{OM} + \vec{MN} = \vec{ON} \rightarrow \vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM}$$



۷۲- با توجه به شکل کدام گزینه درست است؟

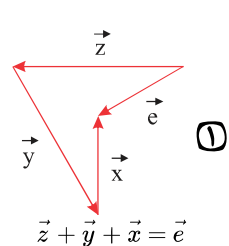
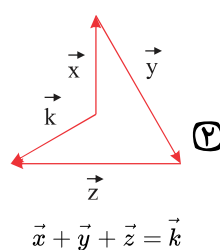
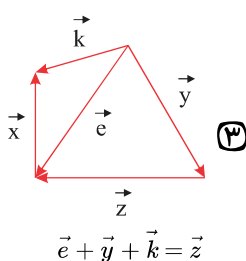
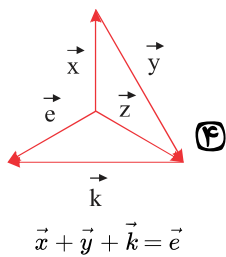


- ① $\vec{x} + \vec{e} + \vec{y} = \vec{o}$
 ② $\vec{f} + \vec{g} - \vec{x} = -\vec{e}$
 ③ $\vec{x} - \vec{y} = -\vec{e}$
 ④ $\vec{x} + \vec{e} = \vec{f} + \vec{g}$

پاسخ: گزینه ۲

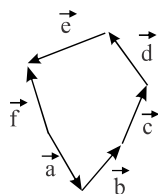
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{g} + \vec{f} = \vec{y} \\ \vec{y} + \vec{e} = \vec{x} \end{array} \right\} + \rightarrow \vec{g} + \vec{f} + \vec{e} = \vec{x} \rightarrow \vec{f} + \vec{g} - \vec{x} = -\vec{e}$$

۷۳- با توجه به شکل‌های زیر کدام یک از روابط برداری، گویای شکل مورد نظر نمی‌باشد؟



پاسخ: گزینه ۳ طبق تعریف بردار مجموع که بردار است که ابتدای بردار اول را به انتهای آخرین بردار متصل می‌کند، مشاهده می‌شود که در گزینه‌ی سوم جمع بردارها گویای شکل سوم نیست.

۷۴- حاصل جمع بردارهای شکل روبه‌رو کدام گزینه است؟



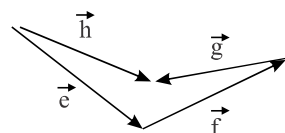
- ② $\vec{a}$
 ④ $\vec{e}$

- ① $2\vec{f}$
 ③ $\vec{f}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\underbrace{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}}_{\vec{f}} + \vec{f} = \vec{f} + \vec{f} = 2\vec{f}$$

۷۵- حاصل جمع بردارهای روبه‌رو برابر است با:



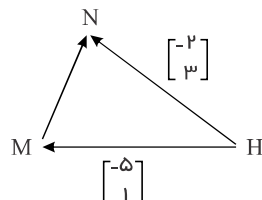
- ② $2\vec{h}$
 ④ $\vec{e}$

- ① $\vec{g}$
 ③ $\vec{f}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\underbrace{\vec{e} + \vec{f} + \vec{g}}_{\vec{h}} + \vec{h} = \vec{h} + \vec{h} = 2\vec{h}$$

۷۶- با توجه شکل مقابل، مختصات $\overrightarrow{MN}$ کدام گزینه است؟

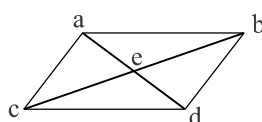


- ② $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$
 ④ $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

- ① $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
 ③ $\begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۱ نکته: برای بدست آوردن بردار تفاضل یا تفریق دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، انتهای برداری را که علامت منفی پشت آن است را به انتهای برداری که علامت منفی ندارد، وصل می‌کنیم.

$$\overrightarrow{HN} - \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{MN} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$



- ④ $\vec{bd}$

- ③ $2\vec{ed}$

۷۷- با توجه به شکل، $\vec{ab} - \vec{ca} + \vec{ea}$ کدام است؟

- ① $\vec{ae}$
 ② $\vec{o}$

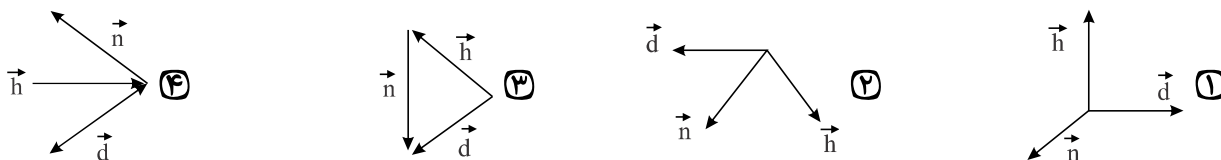


پاسخ: گزینه ۱

$$\vec{ab} - \vec{ca} + \vec{ea} = \vec{ab} + \vec{ac} + \vec{ea} = \vec{ab} + \vec{bd} + \vec{de} = \vec{ae} \quad \text{یا} \quad \vec{ab} + \vec{ac} + \vec{ea} = \vec{ad} + \vec{ea} = \vec{ed}$$

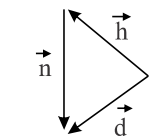
نکته: در روش متوازی الاضلاع در جمع بردارها، برآیند دو بردار (قطر متوازی الاضلاع) به بردار بزرگ‌تر، نزدیک‌تر است.

۷۸- رابطه $\vec{h} = \vec{d} - \vec{n}$ در کدام یک از شکل‌های زیر درست است؟



پاسخ: گزینه ۳

برای به دست آوردن بردار تفاضل یا تفریق دو بردار، انتهای برداری را که علامت منفی پشت آن است را به انتهای برداری که علامت منفی ندارد، وصل کنیم.



$$\vec{h} + \vec{n} = \vec{d}$$

$$\vec{h} = \vec{d} - \vec{n}$$

۷۹- مجموع بردارهای $\vec{HN} + \vec{NA} + \vec{AD} - \vec{NA} + \vec{NH} - \vec{AD}$ کدام گزینه است؟

① ۰ ② $\vec{NA}$ ③ $2\vec{HN}$ ④ $\vec{HN}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\vec{HN} + \cancel{\vec{NA}} + \cancel{\vec{AD}} - \cancel{\vec{NA}} + \vec{NH} - \cancel{\vec{AD}} = \vec{HN} - \vec{NH} = \vec{0}$$

۸۰- اگر عبارت $(\vec{DA} + \vec{EC}) + 4(\vec{AB} - \vec{CB} + \vec{CD})$ برابر با بردار صفر باشد، کدام عبارت زیر درست است؟

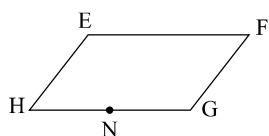
① $\vec{AD} = \vec{EC}$ ② $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{EC}$ ③ $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{EB}$ ④ $\vec{AD} = \vec{BE}$

پاسخ: گزینه ۱

$$5\vec{DA} + \vec{EC} + 4(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}) = 5\vec{DA} + \vec{EC} + 4(\vec{AC} + \vec{CD}) = \vec{0}$$

$$5\vec{DA} + \vec{EC} + 4\vec{AD} = \vec{0} \Rightarrow -5\vec{AD} + 4\vec{AD} + \vec{EC} = \vec{0} \Rightarrow -\vec{AD} + \vec{EC} = \vec{0}$$

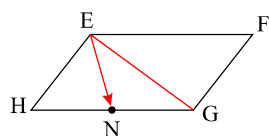
$$\vec{AD} = \vec{EC}$$



۸۱- در متوازی الاضلاع EFGH نقطه N وسط GH است. بردار EN برابر کدام یک از بردارهای زیر است؟

① $2\vec{EH} + \vec{EF}$ ② $\frac{2\vec{EH} + \vec{EF}}{2}$ ③ $2\vec{EH} - \vec{EF}$ ④ $\frac{2\vec{EH} - \vec{EF}}{2}$

پاسخ: گزینه ۲



$$\left. \begin{array}{l} \vec{EG} + \vec{GN} = \vec{EN} \\ \vec{EH} + \vec{HN} = \vec{EN} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع دو رابطه}} \vec{EG} + \vec{EH} + (\vec{HN} + \vec{GN}) = 2\vec{EN}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{EH} + \vec{EG} = 2\vec{EN} \\ \vec{EG} = \vec{EF} + \vec{EH} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\vec{EN} = 2\vec{EH} + \vec{EF}$$

$$\Rightarrow \vec{EN} = \frac{2\vec{EH} + \vec{EF}}{2}$$



۸۲- اگر روی ضلع FG از مثلث EFG ، نقطه N را طوری انتخاب کنیم که $\frac{\overrightarrow{NF}}{\overrightarrow{NG}} = 9$ باشد، در این صورت کدام عبارت درست است؟

$\overrightarrow{FN} = \frac{\overrightarrow{EF} - 9\overrightarrow{EG}}{10}$ (۴)
 $\overrightarrow{FN} = \frac{9\overrightarrow{EF}}{10} + \frac{\overrightarrow{EG}}{10}$ (۳)
 $\overrightarrow{FN} = \frac{\overrightarrow{EF} + 9\overrightarrow{EG}}{10}$ (۵)
 $\overrightarrow{FN} = \frac{\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ نکته: اگر نقطه N پاره خط FG را به نسبت $\frac{b}{a} = \frac{\overrightarrow{NF}}{\overrightarrow{NG}}$ قطع کند، در این صورت داریم:

$$\overrightarrow{FN} = \frac{a\overrightarrow{EF} + b\overrightarrow{EG}}{a+b}$$

$$\frac{\overrightarrow{NF}}{\overrightarrow{NG}} = \frac{9}{1} \rightarrow \begin{matrix} a=9 \\ b=1 \end{matrix} \quad \overrightarrow{FN} = \frac{1 \times \overrightarrow{EF} + 9\overrightarrow{EG}}{1+9} \Rightarrow \overrightarrow{FN} = \frac{\overrightarrow{EF} + 9\overrightarrow{EG}}{10}$$

۸۳- متوازی الاضلاع $EFGH$ را در نظر بگیرید. محل برخورد قطرهای FH و EG را P می‌نامیم. فرض کنید، مختصات نقطه $P = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ باشد، نقطه

D به مختصات $D = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. حاصل جمع بردارهایی که از نقطه D شروع و به باقی نقاط متصل می‌شود؟

$\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ (۴)
 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (۳)
 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (۵)
 $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PE} \\ \overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PF} \\ \overrightarrow{DG} &= \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PG} \\ \overrightarrow{DH} &= \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PH} \end{aligned} \right\}$$

$$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{DH} = 4\overrightarrow{DP} + \underbrace{\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PH}}_{\vec{0}}$$

ادامه
 $\rightarrow 4\overrightarrow{DP} \Rightarrow \overrightarrow{DP} = P - D = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow 4\overrightarrow{DP} \times \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 0 \\ 28 \end{bmatrix}$$

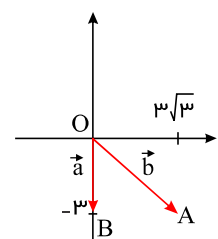
۸۴- زاویه بین دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} \\ -3 \end{bmatrix}$ چند درجه است؟

30° (۱)
 135° (۲)
 60° (۳)
 45° (۴)

پاسخ: گزینه ۳

$$|\vec{OA}| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3)^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36}$$

$$\begin{aligned} |\vec{OA}| &= 6 \\ |\vec{OB}| &= 3 \end{aligned}$$



نوع $|\vec{OA}|$ نصف $|\vec{OB}|$ است پس زاویه متناظر آن $\hat{OAB}$ برابر 30° است. پس زاویه $\hat{AOB} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ می‌باشد.

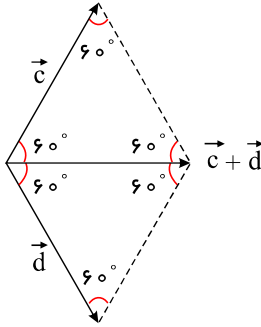
۸۵- اگر اندازه بردارهای $\vec{c}$ ، $\vec{d}$ و $\vec{c} + \vec{d}$ برابر باشند، آنگاه زاویه بین بردار $\vec{c}$ و $\vec{d}$ چقدر است؟

30° (۱)
 120° (۲)
 45° (۳)
 60° (۴)



پاسخ: گزینه ۲

بردارها به صورت شکل مقابل می‌شوند که از دو مثلث متساوی‌الاضلاع به هم چسبیده، تشکیل شده‌اند.



$$60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

۸۶- اندازه بردار $\vec{c} = 1,4\vec{i} + 2,6\vec{j}$ کدام گزینه است؟

④ $\sqrt{6,32}$

③ $\sqrt{8,72}$

② $\sqrt{5}$

① $\sqrt{8}$

پاسخ: گزینه ۳

$$c = \begin{bmatrix} 1,4 \\ 2,6 \end{bmatrix} \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{(1,4)^2 + (2,6)^2} = \sqrt{1,96 + 6,76} = \sqrt{8,72}$$

۸۷- اگر بردار $\begin{bmatrix} 25n - 100 \\ 44n + 88 \end{bmatrix}$ بر محور x ها عمود باشد، قرینه معکوس n کدام است؟

④ $-\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{4}$

⑤ -4

① 4

پاسخ: گزینه ۴ چون بردار مورد نظر بر محور x ها عمود است. بنابراین مقدار طول آن برابر صفر است.

$$25n - 100 = 0 \Rightarrow 25n = +100 \Rightarrow n = +4$$

سؤال، قرینه معکوس n را خواسته است. پس: $\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} -\frac{1}{4}$

۸۸- در عبارت زیر $\vec{a}$ کدام است؟

$$\vec{a} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\vec{a} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

④ $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\vec{a} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\vec{a} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{a} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

۸۹- مقدار $x + y$ با توجه به معادله $\begin{bmatrix} 3 \\ y - x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x - 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

④ -3

③ 36

② 1

① -1

پاسخ: گزینه ۱

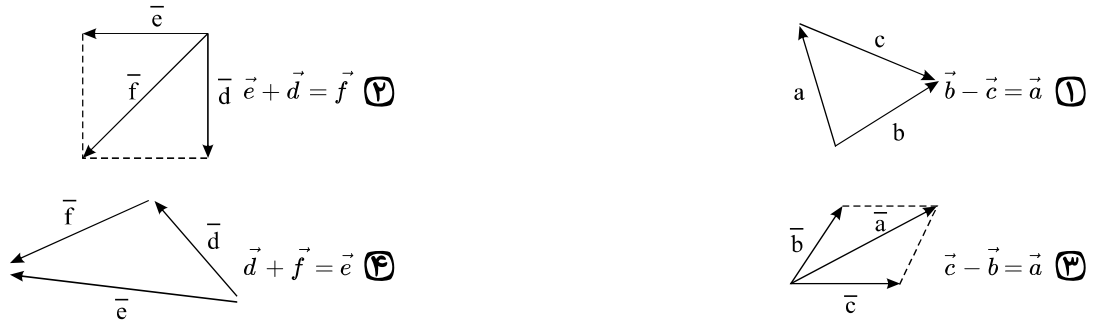
$$\begin{bmatrix} 3 \\ y - x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x - 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 2 \\ y - x - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$2x + 2 = -2 \Rightarrow x = -2$$

$$y - x - 5 = -2 \Rightarrow y + 2 - 5 = -2 \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow x + y = -1$$

۹۰- با توجه به بردارهای رسم شده در هر گزینه، کدام عبارت مربوطه نمی‌تواند صحیح باشد؟



پاسخ: گزینه ۳ در گزینه ۳: $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ می‌باشد. پس عبارت $\vec{c} - \vec{b} = \vec{a}$ نادرست خواهد بود. سایر گزینه‌ها کاملاً صحیح می‌باشند.

۹۱- چنانچه بدانیم با بردار $\vec{AB}$ از نقطه $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ به نقطه $B = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$ می‌رسیم، با بردار $\vec{BA}$ از نقطه C به چه مختصاتی خواهیم رسید؟ (نقطه C ، قرینه نقطه A نسبت به محور x است.)

- ① $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲

$$A + \vec{AB} = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \vec{AB} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{AB} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\vec{BA} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

قرینه نقطه A نسبت به محور x ها: $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow C + \vec{BA} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

۹۲- با توجه به معادله روبه‌رو، قرینه بردار x کدام است؟

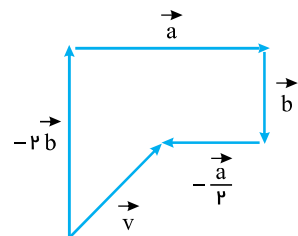
$$2\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

① $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲

$$2\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} - \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

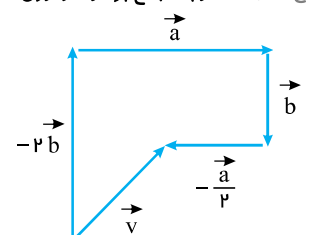


② $\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}$ ④ $\frac{\vec{a}}{2} + \vec{b}$

۹۳- با توجه به شکل مقابل، مقدار $\vec{v}$ بر حسب $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

① $\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}$ ③ $2\vec{b} - \vec{a}$

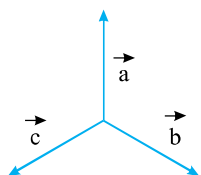
پاسخ: گزینه ۱ رابطه جمع بردارها را روی شکل می‌نویسیم:



$$-2\vec{b} + \vec{a} + \vec{b} + \left(\frac{-\vec{a}}{2}\right) = \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = -\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2} = \frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}$$



۹۴- در شکل مقابل، اندازه سه بردار مساوی است و زاویه بین دوه‌دوی آن‌ها 120° است. حاصل $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ برابر است با:



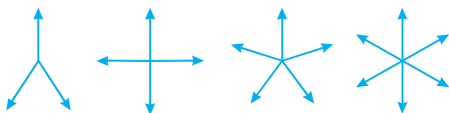
۲ $\vec{a}$ (۴)

$\vec{0}$ (۳)

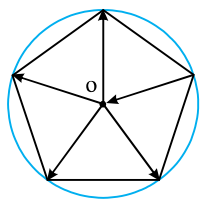
$\vec{a}$ (۲)

۳ $\vec{a}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ هر تعداد بردار هم‌اندازه که زاویه بین هر دو بردار متوالی یکسان باشد و همگی از یک نقطه خارج شوند، حاصل جمع همه با هم صفر است یعنی همگی یکدیگر را خنثی می‌کنند.



۹۵- در شکل روبه‌رو یک پنج‌ضلعی منتظم داریم که در دایره‌ای به شعاع یک محاط شده است. اگر بردار $\vec{x}$ جمع کل بردارهای رسم شده باشد، اندازه بردار $\vec{x}$ کدام است؟



$\frac{3}{2}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + (-\vec{e}) = \vec{0}$$

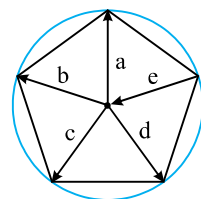
پس:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{e}$$

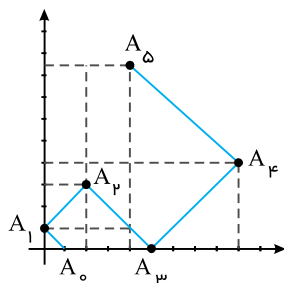
یعنی جمع ۵ بردار می‌شود:

$$\underbrace{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}}_{\vec{e}} = 2\vec{e}$$

اندازه بردار $2\vec{e}$ نیز دو برابر شعاع دایره است یعنی ۲.



۹۶- یک نفر روی نقطه $(1, 0)$ علامت می‌گذارد. در حرکات بعدی به ترتیب روی A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 و ... علامت می‌گذارد. اگر روند ادامه یابد، مختصات A_1 کدام خواهد بود؟



$\begin{bmatrix} 26 \\ 35 \end{bmatrix}$ (۴)

$\begin{bmatrix} 37 \\ 35 \end{bmatrix}$ (۳)

$\begin{bmatrix} 27 \\ 35 \end{bmatrix}$ (۲)

$\begin{bmatrix} 37 \\ 46 \end{bmatrix}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گوی نقطه‌ها را ببینید:

طول نقاط: $1 - 1 + 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 + 8 - 9 + 10 = 26$

عرض نقاط: $0 + 1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 - 7 + 8 + 9 + 10 = 35$

۲۱

۹۷- در شکل مقابل با خط AB به دو قسمت تقسیم شده است، بردار AM بر حسب $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ کدام است؟

HamGamDars.com

مکان درس

دانلود شده از اپلیکیشن همیار

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 2 = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1 + 2y = 5 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 3(x - y) = 3 \times (1 - 2) = 3 \times (-1) = -3 \end{cases}$$

۹۹- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ چهار بردار هم اندازه به طول واحد هستند که می‌توانیم از کنار هم قرار دادن آن‌ها - با حفظ جهت و راستا - یک مربع بسازیم. اندازه بزرگ‌ترین مقدار ممکن $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ چند واحد است؟

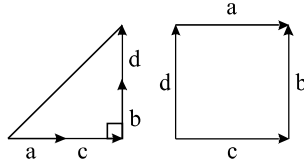
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۵)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ در بهترین حالت، بردارهایی که در مربع مفروض در اضلاع روبه‌رو به هم قرار می‌گیرند، دو به دو هم جهت و هم‌راستا هستند:



در این حالت، می‌توانیم با استفاده از بردارها مثلثی قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به طول ساق‌های دو واحد تشکیل بدهیم که در این حالت طول وتر برابر با اندازه جمع برداری این چهار بردار است. طول وتری که داریم برابر است با:

$$\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۱۰۰- نقطه $O = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ ابتدا با بردار $\vec{a}$ ، سپس با بردار $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ و در آخر با بردار $2\vec{b}$ به نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ منتقل شده است. اگر این نقطه، با بردار $2\vec{a} + 4\vec{b} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ منتقل می‌شد، به کدام نقطه می‌رفت؟

۵ (۴)

۳ (۳)

۱۰ (۵)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} + \vec{a} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{a} + 2\vec{b} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{a} + 2\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times 2} 2\vec{a} + 4\vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\vec{a} + 4\vec{b} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

۱۰۱- علی در خانه $\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ مختصات قرار دارد. از کدام دو حرکت استفاده کند تا به خانه $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ برسد؟

(۱) ابتدا با بردار $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و سپس با بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ حرکت کند.

(۳) ابتدا با بردار $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ و سپس با بردار $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ حرکت کند.

پاسخ: گزینه ۲ اگر $\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ را ابتدای حرکت فرض کنیم با دو بردار پیاپی گفته شده در گزینه «۲» به خانه $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ می‌رسیم.

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۱۰۲- اگر $M = \begin{bmatrix} 3a - 4 \\ -2b + 3 \end{bmatrix}$ و $N = \begin{bmatrix} 2a + 3 \\ b + (-3) \end{bmatrix}$ موازی محور عرض‌ها باشد، مقدار a کدام است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

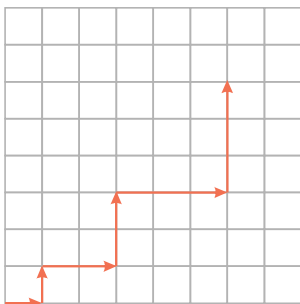
۶ (۵)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ چون $\vec{MN}$ موازی محور عرض‌ها است. پس طول‌های نقاط M و N با هم برابر هستند:

$$3a - 4 = 2a + 3 \Rightarrow 3a - 2a = 7 \Rightarrow a = 7$$

۱۰۳- یک ربات طوری برنامه‌ریزی شده است که مطابق با الگوی زیر از مبدأ شروع به حرکت می‌کند. پس از حرکت یکم، روبات به کدام نقطه می‌رسد؟



۱۲۷۵ (۵)

۱۳۲۶ (۴)

۱۳۲۶ (۱)

۱۲۷۵ (۳)

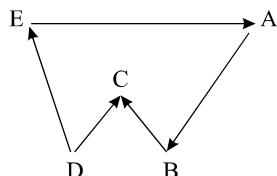


(۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) : حرکت

با توجه به مختصات معلوم می‌شود که در نقطه‌هایی که شماره حرکت زوج است، الگو به صورت $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ است. پس در حرکت صدم روبات حرکت $\begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix}$ را دارد و در حرکت یکصدویکم، روبات حرکت $\begin{bmatrix} 51 \\ 0 \end{bmatrix}$ را دارد، بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 51 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2+3+\dots+51 \\ 1+2+3+\dots+50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{51 \times 52}{2} \\ \frac{50 \times 51}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1326 \\ 1275 \end{bmatrix}$$

۱۰۴ - حاصل جمع ۵ بردار مقابل کدام است؟



- $\vec{AB}$ ①
 $2\vec{BC}$ ②
 $-\vec{CD}$ ③
 $-\vec{AE}$ ④

پاسخ: گزینه ۳

همان‌طور که در شکل سؤال هم ملاحظه می‌کنید $\vec{DE} + \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{DC}$ است، بنابراین داریم:

$$\underbrace{\vec{DE} + \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BC}}_{\vec{DC}} + \vec{DC} = 2\vec{DC} = -2\vec{CD}$$

۱۰۵ - اگر اندازه‌ی بردار $\vec{m} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ برابر k باشد، اندازه‌ی بردار $-2\vec{m}$ چه قدر است؟

- $5k$ ①
 $2k$ ②
 $-2k^2$ ③
 $-2k$ ④

پاسخ: گزینه ۲

$$-2\vec{m} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

در نتیجه اندازه آن برابر با $2k$ است. زیرا اندازه مقداری مثبت است.

۱۰۶ - اگر $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $\vec{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\vec{z} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z}$ برابر است با:

- $\begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}$ ①
 $\begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ ②
 $\begin{bmatrix} 16 \\ 9 \end{bmatrix}$ ③
 $\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$ ④

گزینه ۲: پاسخ

$$\vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

۱۰۷ - با توجه به رابطه $-2 \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 4 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ 8 \end{bmatrix}$ مقدار x و y برابر با کدام گزینه است؟

- $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ ①
 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$ ②
 $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$ ③
 $\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$ ④

پاسخ: گزینه ۴

$$-2 \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 4 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$-2 \times 4 + 3 \times 4 = -y \Rightarrow -8 + 12 = -y \Rightarrow 4 = -y \Rightarrow y = -4$$

$$-2 \times -7 + 3 \times x = 8 \Rightarrow +14 + 3x = 8 \Rightarrow 3x = 8 - 14 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$$

۱۰۸ - اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

- $\vec{a} = 2\vec{b}$ ①
 $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$ ②
 $\vec{a} = -2\vec{b}$ ③
 $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$ ④



پاسخ: گزینه ۱

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 \\ 2 \times 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\vec{b}$$

۱۰۹- کدام بردار با $\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ موازی و هم‌جهت است؟

$$\begin{bmatrix} 9 \\ -21 \end{bmatrix} \quad \textcircled{4}$$

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{bmatrix} -9 \\ 21 \end{bmatrix} \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{bmatrix} -6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ در موازی بودن دو بردار با یکدیگر بایستی نسبت مؤلفه‌ی طول به عرض هر کدام با هم مساوی باشد.

$$\vec{b} = \frac{-3}{7} = \frac{-9}{21}$$

۱۱۰- اگر $\vec{k} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\vec{z} = \frac{1}{3}\vec{k}$ باشد مختصات $\vec{z}$ کدام گزینه است؟

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \textcircled{4}$$

$$\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{bmatrix} -18 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\vec{z} = \frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{z} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \times -6 \\ \frac{1}{3} \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

۱۱۱- سه برابر قرینه‌ی قرینه‌ی بردار $\vec{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ نسبت به مبدأ مختصات کدام گزینه است؟

$$\begin{bmatrix} +18 \\ -24 \end{bmatrix} \quad \textcircled{4}$$

$$\begin{bmatrix} +6 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{bmatrix} -18 \\ +24 \end{bmatrix} \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{bmatrix} -6 \\ +8 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

پاسخ: گزینه ۴ قرینه‌ی قرینه‌ی یک بردار همان بردار است.

$$3(-(-\vec{a})) = 3\vec{a} = 3 \times \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -24 \end{bmatrix}$$

۱۱۲- اگر $\vec{k} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ باشد قرینه‌ی $3\vec{k}$ نسبت به نیم‌ساز دوم و چهارم برابر است با:

$$\begin{bmatrix} -12 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \textcircled{4}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -15 \end{bmatrix} \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{bmatrix} -15 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{bmatrix} 15 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا $3\vec{k}$ را بدست می‌آوریم و سپس نسبت به نیم‌ساز ربع دوم و چهارم قرینه می‌کنیم.

$$3 \times \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{هم جای } x \text{ و } y \text{ عوض می‌شود و هم در دو قرینه می‌شوند.}]{\text{نسبت به قرینه‌ی ربع دوم و چهارم}} \begin{bmatrix} -12 \\ +15 \end{bmatrix}$$

۱۱۳- اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} +16 \\ -12 \end{bmatrix}$ باشد. آن‌گاه:

$$\vec{b} = 4\vec{a} \quad \textcircled{4}$$

$$\vec{a} = 4\vec{b} \quad \textcircled{3}$$

$$\vec{a} = -4\vec{b} \quad \textcircled{2}$$

$$\vec{b} = -4\vec{a} \quad \textcircled{1}$$

پاسخ: گزینه ۱

$$-4 \times \vec{a} = -4 \times \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +16 \\ -12 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

۱۱۴- در معادله‌ی $3\vec{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix}$ مختصات $\frac{1}{4}\vec{x}$ کدام گزینه است؟

$$\begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ +2 \end{bmatrix} \quad \textcircled{4}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ +1 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

سوالات ۵-۸

$$\begin{aligned} 3\vec{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow 3\vec{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3\vec{x} = \begin{bmatrix} -8+2 \\ 6-3 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow 3\vec{x} &= \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{4}\vec{x} = \frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۱۱۵- اگر $n = 0$ باشد، آن گاه:

$$n\vec{x} = \vec{x} \quad (4)$$

$$n\vec{x} = \vec{0} \quad (3)$$

$$n\vec{x} = n \quad (5)$$

$$n\vec{x} = -\vec{x} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳ ضرب عدد صفر در هر بردار، حاصل بردار صفر خواهد بود.

۱۱۶- اگر بردار $\vec{m} = \begin{bmatrix} k-6 \\ 3k-6 \end{bmatrix}$ موازی محور طول‌ها باشد، مقدار $\vec{m}$ کدام گزینه است؟

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ +1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳ در صورتی که برداری موازی محور طول‌ها باشد بایستی عرض آن صفر باشد.

بنابراین خواهیم داشت:

$$3k - 6 = 0 \Rightarrow 3k = +6 \Rightarrow \boxed{k = 2}$$

$$\rightarrow \vec{m} = \begin{bmatrix} 2-6 \\ 3 \times 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۱۱۷- کدام بردار با بردارهای دیگر هم جهت نیست؟

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} +20 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -60 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -48 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳ روش اول: بردار $\vec{b} = \begin{bmatrix} +20 \\ 4 \end{bmatrix}$ با سایر گزینه‌ها هم جهت نیست.

در گزینه‌های اول، دوم و چهارم مؤلفه‌های طول و عرض مضرب چهارم یکدیگرند اما در گزینه‌ی سوم مؤلفه‌ی طول مضرب پنجم مؤلفه‌ی عرض می‌باشد.

روش دوم: علامت مؤلفه‌های بردار گزینه (۳) با سایر گزینه‌ها متفاوت است.

۱۱۸- اگر بردار $\vec{h} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ باشد و بردار $\vec{m} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}$ باشد می‌توان گفت: ($k > 0$)(۲) بردار $k\vec{h}$ منطبق بر بردار $\vec{m}$ می‌باشد.(۱) بردار $k\vec{h}$ موازی ولی خلاف جهت بردار $\vec{m}$ می‌باشد.(۴) بردار $k\vec{h}$ موازی بردار $\vec{m}$ می‌باشد.(۳) بردار $k\vec{h}$ عمود بر بردار $\vec{m}$ می‌باشد.پاسخ: گزینه ۱ بردار $k\vec{h}$ موازی بردار $\vec{m}$ ولی در خلاف جهت یکدیگرند.۱۱۹- اگر بردار $\vec{z} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\vec{k} = \frac{1}{4}\vec{z}$ باشد، مختصات $\vec{x} = 6\vec{z} + 8\vec{k}$ کدام گزینه است؟

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -24 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} -24 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} -32 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{k} = \frac{1}{4}\vec{z} = \frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = 6\vec{z} + 8\vec{k} \Rightarrow \vec{x} = 6 \times \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} + 8 \times \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -24 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -32 \\ 8 \end{bmatrix}$$



۱۲۰- اگر بردار $\vec{m} = \begin{bmatrix} 4x-2 \\ 4y+2 \end{bmatrix}$ و $\vec{n} = \begin{bmatrix} 4x+8 \\ 12-4y \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\vec{n} - \vec{m}$ برابر است با:

④ $\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} -10 \\ -10 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} -4 \\ -12 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} 4x-2 \\ 4y+2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 4x+8 \\ 12-4y \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} - \vec{m} = \begin{bmatrix} 4x+8 \\ 12-4y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4x-2 \\ 4y+2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{n} - \vec{m} = \begin{bmatrix} \cancel{4x}+8-\cancel{4x}+2 \\ 12+\cancel{4y}-\cancel{4y}-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

۱۲۱- اگر $A = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\vec{AC} = \vec{BC}$ باشد. مختصات نقطه‌ی C کدام است؟

④ $\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} -13 \\ 9 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\vec{AC} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+6 \\ y-4 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{AC} = \begin{bmatrix} 2x+12 \\ 2y-8 \end{bmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+12 \\ 2y-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y+1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x+12 = x-1 \rightarrow 2x-x = -12-1 \rightarrow x = -13 \\ 2y-8 = y+1 \rightarrow 2y-y = +8+1 \rightarrow y = +9 \end{cases}$$

۱۲۲- در معادله‌ی $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \vec{x} = 2\vec{x} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، مختصات $\vec{x}$ کدام است؟

④ $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \vec{x} = 2\vec{x} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} - 2\vec{x} = -\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow -\vec{x} = \begin{bmatrix} -3-1 \\ -5-2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

۱۲۳- در معادله‌ی مختصاتی مقابل مقدار x کدام است؟

$$4\vec{x} + 6 \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = 2\vec{x} + 8 \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

④ $\begin{bmatrix} -36 \\ -16 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 36 \\ 16 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} 16 \\ -36 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} -16 \\ 36 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۴

$$4\vec{x} + 6 \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = 2\vec{x} + 8 \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 4\vec{x} + \begin{bmatrix} 24 \\ 48 \end{bmatrix} = 2\vec{x} + \begin{bmatrix} -48 \\ 16 \end{bmatrix} \Rightarrow 4\vec{x} - 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -24 \\ -48 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -48 \\ 16 \end{bmatrix} \Rightarrow 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -72 \\ -32 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -36 \\ -16 \end{bmatrix}$$

۱۲۴- اگر $\begin{bmatrix} 4x+6 \\ 2y-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -16 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $y-x$ کدام گزینه است؟

④ ۳

③ -۴

⑤ -۱۰

① -۲

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{bmatrix} 4x+6 \\ 2y-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$4x+6 = 18 \Rightarrow 4x = 18-6 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$$

$$2y-2 = -16 \Rightarrow 2y = -16+2 \Rightarrow 2y = -14 \Rightarrow y = -7$$

$$y-x = -7-3 = -10$$

۱۲۵ - مقدار x و y در معادله‌ی مختصاتی زیر کدام گزینه است؟

$$4 \begin{bmatrix} x+2 \\ x+2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

④ $x = +4$
 $y = -10$

③ $x = 4$
 $y = 10$

⑤ $x = 10$
 $y = 4$

① $x = -4$
 $y = -10$

پاسخ: گزینه ۳

$$4 \begin{bmatrix} x+2 \\ x+2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4x+8 \\ 4x+8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$4x+8-8=16 \Rightarrow 4x=16 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

$$4x+8-2y=4 \Rightarrow 4 \times 4+8-2y=4 \Rightarrow 24-2y=4 \Rightarrow -2y=4-24$$

$$\Rightarrow -2y=-20 \Rightarrow y=10$$

۱۲۶ - نقطه‌ی $p = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}$ را سی بار تحت بردار $\vec{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \\ 15 \end{bmatrix}$ انتقال داده‌ایم. قرینه‌ی نقطه‌ی حاصل نسبت به محور عرض‌ها برابر است با:

④ $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix} + 30 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 \\ 300 \\ 30 \\ 450 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 298 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 24 \\ 298 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{(طول قرینه می‌شود)}]{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}} \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۱۲۷ - اگر نقطه‌ی $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را k بار با بردار $\vec{p} = \begin{bmatrix} t \\ f \end{bmatrix}$ انتقال دهیم، نقطه‌ی بدست آمده کدام گزینه خواهد بود؟

④ $\begin{bmatrix} x+kt \\ y+kf \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} kt \\ kf \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} x-kt \\ y-kf \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} xkt \\ ykf \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۴

$$V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + k \times \begin{bmatrix} t \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+kt \\ y+kf \end{bmatrix}$$

۱۲۸ - نقطه‌ی $D = \begin{bmatrix} 2n-6 \\ 4n+8 \end{bmatrix}$ را که روی محور طول‌ها قرار دارد پنج بار تحت بردار $\vec{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ و پنج بار دیگر تحت بردار $\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ +4 \end{bmatrix}$ انتقال می‌دهیم، قرینه‌ی حاصل نسبت به نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم کدام است؟

④ $\begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} -20 \\ -15 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} -15 \\ 20 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} 15 \\ -20 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۴ نقطه‌ی d روی محور طول‌هاست و عرض آن صفر است. $\leftarrow 4n+8=0$

$$D = \begin{bmatrix} 2n-6 \\ 4n+8 \end{bmatrix}$$

$$4n+8=0 \Rightarrow 4n=-8 \Rightarrow \boxed{n=-2}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 \times -2 - 6 \\ 4 \times -2 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D' = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$D' = \begin{bmatrix} -10+30+0 \\ 0-5+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{جای } x, y \text{ را عوض می‌کنیم}]{\text{قرینه نسبت به ربع اول و سوم}} \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix}$$

۱۲۹ - اگر $\vec{h} = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix}$ باشد، قرینه‌ی $3\vec{h}$ نسبت به نیم‌ساز دوم و چهارم برابر است با:

④ $\begin{bmatrix} 18 \\ -27 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 27 \\ -18 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} -27 \\ 18 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} -18 \\ 27 \end{bmatrix}$

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$3\vec{h} = 3 \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ 27 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به ربع دوم و چهارم}} \begin{bmatrix} -27 \\ +18 \end{bmatrix}$$

هم جای x و y عوض می‌شود و هم هر دو قرینه می‌شوند.

۱۳۰- نقطه‌ی $M = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ را پنج بار متوالی با بردار $\vec{W}$ انتقال داده‌ایم و به $N = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$ رسیده‌ایم. مختصات بردار $\vec{W}$ کدام گزینه است؟

④ $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

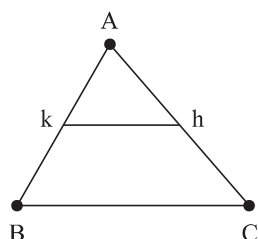
⑤ $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲

$$M = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + 5\vec{W} = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} \Rightarrow 5\vec{W} = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow 5\vec{W} = \begin{bmatrix} 12-2 \\ -8+3 \end{bmatrix}$$

$$5\vec{W} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{W} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$



۱۳۱- اگر h و k وسط اضلاع AC و AB از مثلث ABC باشد، مختصات $\vec{BC}$ برابر است با:

(راهنمایی: $\vec{kh} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$)

⑤ $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

④ $\begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۴ طبق قضیه‌ی تالس داریم: $kh = \frac{1}{2}\vec{BC}$

$$\vec{BC} = \begin{bmatrix} 2 \times 6 \\ 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

۱۳۲- از نقطه‌ی $M = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$ به اندازه‌ی بردار $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ جابجا می‌شویم تا به نقطه‌ی N برسیم و سپس به اندازه‌ی بردار $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ حرکت می‌کنیم تا به نقطه‌ی F برسیم. با چه برداری مستقیم از M به F می‌رسیم؟

④ $\begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۱ مختصات بردار مستقیم از نقطه‌ی اول (M) به نقطه‌ی سوم (F) برابر است با مجموع دو بردار انتقال.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

مختصات بردار مستقیم از M به F

۱۳۳- اگر $\vec{x}$ یک بردار و $m > 1$ عددی حقیقی باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

① بردارهای $m\vec{x}$ و $\vec{x}$ هم‌جهت و طول $m\vec{x}$ از طول $\vec{x}$ کوچکتر است.

② بردارهای $m\vec{x}$ و $\vec{x}$ هم‌جهت‌اند و طول $m\vec{x}$ از طول $\vec{x}$ بزرگتر است.

③ بردارهای $m\vec{x}$ و $\vec{x}$ در جهت مخالف هستند و طول $m\vec{x}$ از طول $\vec{x}$ کوچکتر است.

④ بردارهای $m\vec{x}$ و $\vec{x}$ در جهت مخالف هم هستند و طول $m\vec{x}$ از طول $\vec{x}$ بزرگتر است.

پاسخ: گزینه ۲ چون m عددی بزرگتر از ۱ است بنابراین با حاصل ضرب m در مختصات بردار، بردار بزرگتر خواهد بود و بدلیل هم‌علامت بودن در یک جهت خواهند بود.

۱۳۴- اگر نقطه‌ی $P = \begin{bmatrix} 2x-1 \\ 2-y \end{bmatrix}$ تحت بردار $\vec{T} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ بیست بار منتقل شود تا به نقطه‌ی $Q = \begin{bmatrix} x-1 \\ y-x-2 \end{bmatrix}$ برسد، مقدار xy چقدر

است؟

④ -400

③ -320

⑤ 200

① -110

پاسخ: گزینه ۳

$$P + 20\vec{T} = Q \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x-1 \\ 2-y \end{bmatrix} + 20 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y-x-2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x-1-40 = x-1 \\ 2-y-60 = y-x-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-x = -1+41 \\ -2y+x = 56 \end{cases} \rightarrow \boxed{x = 40}$$



$$\rightarrow -2y + 40 = 56 \rightarrow -2y = 56 - 40 \rightarrow -2y = 16 \rightarrow \boxed{y = -8}$$

$$xy = 40 \times (-8) = -320$$

۱۳۵ - مقدار عددی مجهول در عبارت مقابل کدام گزینه است؟

$$\begin{bmatrix} 8x - 12 \\ -2y + 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10x - 14 \\ -6y - 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -38 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} x = -5 \\ y = +15 \end{matrix} \quad \textcircled{4}$$

$$\begin{matrix} x = -15 \\ y = -5 \end{matrix} \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{matrix} x = -15 \\ y = 5 \end{matrix} \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{matrix} x = -5 \\ y = -15 \end{matrix} \quad \textcircled{1}$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{bmatrix} 8x - 12 \\ -2y + 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10x - 14 \\ -6y - 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -38 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 8x - 12 - 10x + 14 = 12 \rightarrow -2x + 2 = 12 \rightarrow -2x = 10 \rightarrow \boxed{x = -5} \\ -2y + 8 + 6y + 14 = -38 \rightarrow +4y + 22 = -38 \rightarrow 4y = -60 \rightarrow \boxed{y = -15} \end{cases}$$

۱۳۶ - بردارهای $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{6} \end{bmatrix}$ داده شده‌اند. این دو بردار

هم‌جهت نیستند و اندازه‌ی یکی ۴ برابر دیگری است. $\textcircled{2}$

هم‌جهت‌اند و اندازه‌ی یکی ۶ برابر دیگری است. $\textcircled{1}$

هم‌جهت هستند و اندازه‌ی یکی ۶ برابر دیگری است. $\textcircled{4}$

هم‌جهت هستند و اندازه‌ی یکی ۴ برابر دیگری است. $\textcircled{3}$

پاسخ: گزینه ۴ اگر بردار $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$ را در عدد ۶ - ضرب کنیم بردار $\begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{6} \end{bmatrix}$ بدست می‌آید. پس یکی از بردارها شش برابر دیگری و در خلاف جهت آن است.

۱۳۷ - حاصل $q + p$ را به گونه‌ای بیابید که بردارهای $\vec{T} = \begin{bmatrix} 34 \\ 6p - 2 \end{bmatrix}$ و $\vec{W} = \begin{bmatrix} 14q + 8 \\ 26 \end{bmatrix}$ قرینه‌ی یکدیگر باشند.

$$-7 \quad \textcircled{4}$$

$$12 \quad \textcircled{3}$$

$$-\frac{1}{13} \quad \textcircled{2}$$

$$-\frac{3}{11} \quad \textcircled{1}$$

پاسخ: گزینه ۴ اگر دو بردار قرینه‌ی یکدیگر باشد مؤلفه‌های طول آن‌ها با هم قرینه و مؤلفه‌های عرض آن‌ها نیز با هم قرینه خواهند بود.

$$\vec{W} = -\vec{T}$$

$$\begin{bmatrix} 14q + 8 \\ 26 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 34 \\ 6p - 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 14q + 8 = -34 \\ 26 = -(6p - 2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 14q = -34 - 8 \\ -6p + 2 = 26 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 14q = -42 \rightarrow q = -3 \\ -6p = 24 \rightarrow p = -4 \end{cases} \Rightarrow q + p = -3 - 4 = -7$$

۱۳۸ - بردار $\vec{W} = \begin{bmatrix} 3m + 3 \\ 3 - 6m \end{bmatrix}$ موازی محور عرض‌ها است. مختصات $\frac{\vec{W}}{2}$ کدام گزینه است؟

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textcircled{4}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 18 \end{bmatrix} \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix} \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ برای این که برداری موازی محور عرض‌ها باشد بایستی مؤلفه‌های طول آن صفر باشد. بنابراین:

$$3m + 3 = 0 \Rightarrow 3m = -3 \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} 3 \times (-1) + 3 \\ 3 - 6 \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 3 \\ 3 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\vec{W}}{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$



۱۳۹ - نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 2k+6 \\ 4-L \end{bmatrix}$ را ۵۰ بار تحت بردار $\begin{bmatrix} \frac{k}{2} \\ 2L-2 \end{bmatrix}$ انتقال دهیم به نقطه‌ی $\begin{bmatrix} \frac{k-6}{4} \\ \frac{L}{10} \end{bmatrix}$ می‌رسیم. مقدار L و k چقدر است؟

$$k = \frac{-147}{150} \quad (4)$$

$$L = \frac{36}{990}$$

$$k = \frac{30}{140} \quad (3)$$

$$L = \frac{85}{990}$$

$$k = \frac{-30}{107} \quad (2)$$

$$L = \frac{960}{989}$$

$$k = \frac{27}{100} \quad (1)$$

$$L = \frac{-15}{950}$$

پاسخ: گزینه ۲

نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 2k+6 \\ 4-L \end{bmatrix}$ ابتدای بردار و $50 \times \begin{bmatrix} \frac{k}{2} \\ 2L-2 \end{bmatrix}$ طول بردار است و انتهای بردار است.

انتهای بردار = طول بردار + ابتدای بردار

$$\begin{bmatrix} 2k+6 \\ 4-L \end{bmatrix} + 50 \cdot \begin{bmatrix} \frac{k}{2} \\ 2L-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k-6}{4} \\ \frac{L}{10} \end{bmatrix}$$

$$2k+6+25k = \frac{k-6}{4} \rightarrow 27k+6 = \frac{k-6}{4}$$

$$\rightarrow 108k+24 = k-6 \rightarrow 107k = -24-6 \rightarrow k = \frac{-30}{107}$$

$$4-L+100L-100 = \frac{L}{10}$$

$$\rightarrow 99L-96 = \frac{L}{10} \rightarrow 990L-960 = L \rightarrow 990L-L = +960$$

$$\rightarrow 989L = 960 \rightarrow L = \frac{960}{989}$$

۱۴۰ - در عبارت‌های زیر $\vec{a} = n \times \vec{b}$ است. n کدام است؟

$$\vec{a} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = -3\vec{a} + \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$4\vec{b} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} = 2\vec{b} + \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{2}{2} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا مختصات بردار a را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a} + 3\vec{a} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4\vec{a} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مختصات بردار b را نیز به دست می‌آوریم:

$$4\vec{b} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} = 2\vec{b} + \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix} \Rightarrow 2\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2\vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \frac{2}{3} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{b} \times \frac{2}{3}$$



۱۴۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دو برابر بردار $\vec{X} = \vec{AB} - \vec{BA}$ نقطه $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ را به کدام نقطه انتقال می‌دهد؟

- ① $\begin{bmatrix} -3 \\ -12 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -7 \\ 27 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -3 \\ 21 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 3 \\ -21 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا بردار $\vec{AB}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

حال بردار $\vec{BA}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{BA} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

حال بردار $\vec{X}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow 2\vec{X} = 2 \times \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 20 \end{bmatrix}$$

اگر نقطه C را با بردار $2\vec{X}$ انتقال دهیم، به نقطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 22 \end{bmatrix}$$

۱۴۲- حاصل عبارت زیر برابر است با:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 2 \end{bmatrix} = ?$$

- ① $\begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -3 \\ -10 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \times (-4) \\ \frac{1}{2} \times 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \times (-\frac{1}{3}) \\ 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

۱۴۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دو برابر بردار $\vec{X} = \vec{AB} - \vec{BA}$ نقطه $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ را به کدام نقطه اتصال می‌دهد؟

- ① $\begin{bmatrix} 3 \\ -12 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -7 \\ 22 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -3 \\ 21 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 3 \\ -21 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا بردار $\vec{AB}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

حال بردار $\vec{BA}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{BA} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

حال بردار $\vec{X}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow 2\vec{X} = 2 \times \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 20 \end{bmatrix}$$

اگر نقطه C را با بردار $2\vec{X}$ انتقال دهیم، به نقطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 22 \end{bmatrix}$$

۱۴۴- در عبارت زیر $\vec{a}$ کدام است؟

$$\vec{a} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\vec{a} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- ① $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\vec{a} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\vec{a} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{a} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$



۱۴۵- اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2x-1 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2y-2 \end{bmatrix}$ و $\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ باشند، آنگاه حاصل $2\vec{c} + 3\vec{a}$ در صورتی که $\vec{c} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ باشد، کدام است؟

- ① $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -11 \\ 14 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا با توجه به اطلاعات داده شده مقادیر x و y را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} &\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x-1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2y-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{cases} 2x-1+7=4 \\ 4+2y-2=4 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x=-2 \\ 2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow 2\vec{c} + 3\vec{a} = 2 \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \times \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۱۴۶- اگر بردار $\vec{a}$ به اندازه ۳ واحد در جهت شمال شرقی باشد و $2\vec{a} = \vec{b}$ باشد، اندازه و جهت بردار $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ کدام است؟

- ① ۱۵ واحد و در جهت شمال شرقی ② ۱۵ واحد و در جهت جنوب غربی ③ ۳ واحد و در جهت شمال شرقی ④ ۳ واحد و در جهت جنوب غربی

پاسخ: گزینه ۲

$$\vec{c} = 3\vec{a} - 4(2\vec{a}) = 3\vec{a} - 8\vec{a} = -5\vec{a}$$

پس بردار $\vec{c}$ به اندازه ۵ برابر $\vec{a}$ ، یعنی ۱۵ واحد است و با توجه به علامت منفی جهت آن خلاف جهت بردار $\vec{a}$ یعنی در جهت جنوب غربی است.

۱۴۷- اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} k+3 \\ 3k-2 \end{bmatrix}$ و بردار $\vec{a} + \vec{b}$ در جهت محور عرض‌ها باشد، بردار $2\vec{a} - 3\vec{b}$ کدام است؟

- ① $\begin{bmatrix} -20 \\ 1 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -8 \\ 21 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۱ برای آن که بردار $\vec{a} + \vec{b}$ در جهت محور عرض‌ها باشد، باید مؤلفه اول آن صفر باشد، پس داریم:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k+3 \\ 3k-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} &\Rightarrow -4 + (k+3) = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \vec{b} = \begin{bmatrix} 1+3 \\ 3 \times (1) - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2 \times \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - 3 \times \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۱۴۸- اگر بردار $\vec{a}$ به اندازه ۳ واحد در جهت شمال شرقی باشد و $2\vec{a} = \vec{b}$ باشد، اندازه و جهت بردار $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ کدام است؟ (نگاه به گذشته)

- ① ۱۵ واحد و در جهت شمال شرقی ② ۱۵ واحد و در جهت جنوب غربی ③ ۳ واحد و در جهت شمال شرقی ④ ۳ واحد و در جهت جنوب غربی

پاسخ: گزینه ۲

$$\vec{c} = 3\vec{a} - 4(2\vec{a}) = 3\vec{a} - 8\vec{a} = -5\vec{a}$$

پس بردار $\vec{c}$ به اندازه ۵ برابر $\vec{a}$ ، یعنی ۱۵ واحد است و با توجه به علامت منفی، جهت آن خلاف جهت بردار $\vec{a}$ یعنی در جهت جنوب غربی است.

۱۴۹- اگر علامت $(^T)$ بین دو عدد طبیعی به صورت $a^T b = \begin{bmatrix} -a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ تعریف شود، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$2 \times (4^T 5) + 3 \times (-2^T 6) + (1^T 1) = ?$$

- ① $\begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 3 \\ 35 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۴

$$(4^T 5) = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$(-2^T 6) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$(1^T 1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$2 \times (4^T 5) + 3 \times (-2^T 6) + (1^T 1) = 2 \times \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} + 3 \times \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 35 \end{bmatrix}$$



۱۵۰- اگر بردار $\vec{DC} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ و $\vec{CB} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$ باشد، مختصات بردار $2\vec{BD}$ کدام است؟

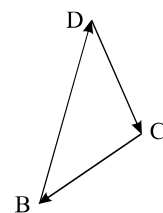
④ $\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۱



$$\vec{DC} + \vec{CB} + \vec{BD} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} + \vec{BD} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{BD} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \times \vec{BD} = 2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix}$$

۱۵۱- سه نقطه $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 2x+1 \\ 8 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر رابطه $2\vec{AB} - \vec{CA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix}$ برقرار باشد، x کدام است؟

④ -۷

③ ۸

② صفر

① ۷

پاسخ: گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} \vec{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 2\vec{AB} = \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \vec{CA} = A - C = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x+1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2x \\ -6 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\vec{AB} - \vec{CA} = \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3-2x \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow -10 - 3 + 2x = 1$$

$$\Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$$

۱۵۲- $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هر دو در ناحیه اول رسم شده‌اند و هم‌اندازه‌اند. $\vec{a}$ با محور x زاویه 10° و $\vec{b}$ با محور y زاویه 8° ساخته است. $\vec{a} - \vec{b}$ با محور x زاویه‌ای می‌سازد؟

④ 44°

③ 45°

⑤ 48°

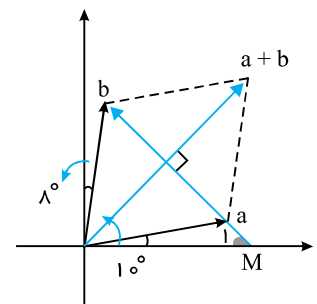
① 46°

پاسخ: گزینه ۴

چون دو بردار هم‌اندازه‌اند، متوازی‌الاضلاع به لوزی تبدیل می‌شود. منظور محاسبه $\hat{M}_1$ است. ابتدا زاویه $\vec{a} + \vec{b}$ را با محور x حساب می‌کنیم:

$$90^\circ - (8^\circ + 10^\circ) = 72^\circ$$

$$72^\circ \div 2 = 36^\circ$$



زاویه $\vec{a} + \vec{b}$ با محور x ها:

حالا طبق شکل، زاویه $\hat{M}_1$ متمم این زاویه است، پس:

$$36^\circ + 10^\circ = 46^\circ$$

$$\hat{M}_1 = 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ$$

۱۵۳- اگر نقطه $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ انتقال یافته نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ تحت بردار $\vec{t}$ باشد، سه برابر $\vec{t}$ کدام است؟

④ $-3\vec{i} - 12\vec{j}$

③ $-\vec{i} + 4\vec{j}$

⑤ $3\vec{i} + 12\vec{j}$

① $\vec{i} + 4\vec{j}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$3 \times \vec{t} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} = 3\vec{i} + 12\vec{j}$$



۱۵۴- نوعی اسلحه در اختیار داریم که در لحظه پرتاب گلوله، هنگامی که اسلحه را با زاویه معینی نسبت به افق در دست داریم، نیرویی معادل $\vec{F}_1 = 7\vec{j} + 2\vec{i}$ به گلوله وارد می‌کند. گلوله تحت تأثیر $\vec{F}_1$ و نیروی وزن خود که در راستای عمودی به آن وارد می‌شود، پرتاب می‌گردد، بنابراین برآیند نیروهای وارد بر گلوله برابر مجموع بردارهای $\vec{F}_1$ و $\vec{W}$ (وزن) خواهد بود. اگر برآیند نیروهای وارد بر گلوله بر روی سطح زمین برابر $\vec{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ باشد، در پرتاب گلوله در سطح ماه با همان زاویه معین، با اسلحه‌ای که ۲ برابر اسلحه قبلی قدرت پرتاب دارد، برآیند نیروهای وارد بر گلوله کدام است؟ (نیروهای جاذبه گرانشی در سطح ماه، $\frac{1}{6}$ این نیرو در سطح زمین بوده و در نتیجه، وزن اجسام در سطح ماه، $\frac{1}{6}$ وزن آن‌ها در سطح زمین خواهد بود. نیروی اصطکاک قابل چشم پوشی است.)

① $\begin{bmatrix} 4 \\ 13/5 \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} 7/6 \\ 6 \\ 13 \\ 3 \end{bmatrix}$

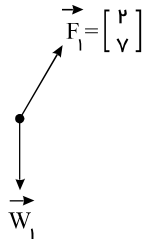
③ $\begin{bmatrix} 4 \\ 17 \end{bmatrix}$

④ $\begin{bmatrix} 4 \\ 14/5 \end{bmatrix}$

گزینه ۱: پاسخ

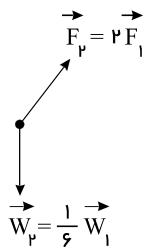
$$\vec{A} = \vec{F}_1 + \vec{W}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \vec{W}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{W}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{وزن گلوله روی سطح ماه } \vec{W}_p = \frac{1}{6} \vec{W}_1 \Rightarrow \vec{W}_p = \frac{1}{6} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$



$$\vec{F}_p = 2\vec{F}_1 \Rightarrow \vec{F}_p = 2 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\vec{B} = \vec{F}_p + \vec{W}_p = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 13/2 \end{bmatrix}$$



۱۵۵- اگر بردار a شکل زیر و $\vec{b} = 2\vec{a}$ و $\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{b}$ باشد، بردار $\vec{c} + 2\vec{b} - \vec{a}$ کدام یک از بردارهای زیر می‌باشد؟

④ $\vec{0}$

③ ↗

⑤ ↘

① ←

پاسخ: گزینه ۴

$$\left. \begin{aligned} \vec{c} &= -\frac{3}{2}\vec{b} = -\frac{3}{2}(2\vec{a}) = -3\vec{a} \\ \vec{b} &= 2\vec{a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{c} + 2\vec{b} - \vec{a} = -3\vec{a} + 4\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$$

بردار حاصل، بردار صفر است.

۱۵۶- اگر $\vec{m} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}$ ، $\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $\vec{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix}$ و $a\vec{m} + b\vec{n} = \vec{d}$ باشد، آن‌گاه حاصل $a + b$ کدام است؟

④ -۳

③ ۳

⑤ -۲

② ۲

پاسخ: گزینه ۱

$$a\vec{m} + b\vec{n} = \vec{d} \Rightarrow a \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4a \\ -8a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b \\ -3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4a + 2b \\ -8a - 3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \times \begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ -8a - 3b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ -4a - 3b = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{b = 5}{b = 5}$$

$$4a + 2(5) = -2 \Rightarrow 4a = -2 - 10 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow a + b = -3 + 5 = 2$$

۱۵۷- اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $2\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{j}$ ، مختصات بردار b کدام است؟

④ $\begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 2 \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{j} \Rightarrow 2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \vec{b} = 3\vec{j} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} + \vec{b} = 3\vec{j} \Rightarrow \vec{b} = 3\vec{j} - \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 2 \\ 3 - (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

۱۵۸- اگر $\vec{\ell} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ باشد طول بردار $\vec{\ell}$ چیست؟

④ $x + y$

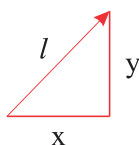
③ $\sqrt{x^2 + y^2}$

⑤ $x^2 + y^2$

① $(x + y)^2$

پاسخ: گزینه ۳

طبق قضیه فیثاغورس داریم:



$$\ell^2 = x^2 + y^2$$

$$|\vec{\ell}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

نماد $|\vec{\ell}|$ نشان دهنده طول بردار $\vec{\ell}$ است.

۱۵۹- اگر $\vec{a} = 10\vec{i} - 4\vec{j}$ و $\vec{b} = -4\vec{a}$ و $\vec{c} = -2\vec{b}$ باشد، حاصل $\vec{c}$ کدام است؟

④ $40\vec{i} - 16\vec{j}$

③ $80\vec{i} - 32\vec{j}$

⑤ $-80\vec{i} - 32\vec{j}$

① $-40\vec{i} + 16\vec{j}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\vec{a} = 10\vec{i} - 4\vec{j} \quad \vec{b} = -4\vec{a} \quad \vec{c} = -2\vec{b}$$

$$\vec{b} = -4(10\vec{i} - 4\vec{j}) \Rightarrow \vec{b} = -40\vec{i} + 16\vec{j}$$

$$\vec{c} = -2(-40\vec{i} + 16\vec{j}) \Rightarrow \vec{c} = +80\vec{i} - 32\vec{j}$$

۱۶۰- بردار $\vec{OX} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix}$ چه زاویه‌ای با محور عرض‌ها می‌سازد؟

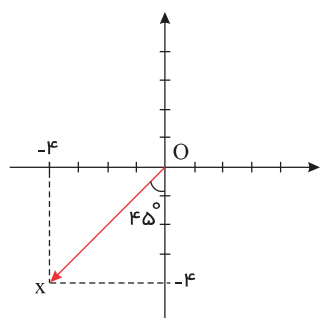
④ 60°

③ 45°

⑤ 90°

① 30°

پاسخ: گزینه ۳





۱۶۱ - مقدار x و y در معادله‌ی مقابل کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 6x - 4 \\ 8y + 2 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases} \quad \textcircled{4}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = -3 \end{cases} \quad \textcircled{5}$$

$$\begin{cases} x = -7 \\ y = 3 \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{bmatrix} 6x - 4 \\ 8y + 2 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6x - 4 - 36 \\ 8y + 2 + 24 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6x - 40 \\ 8y + 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$6x - 40 = 2 \Rightarrow 6x = 42 \Rightarrow x = 7$$

$$8y + 26 = 2 \Rightarrow 8y = 2 - 26 \Rightarrow 8y = -24 \Rightarrow y = -3$$

۱۶۲ - اگر $m\vec{i} + n\vec{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $m + n$ چیست؟

$$-6 \quad \textcircled{4}$$

$$+6 \quad \textcircled{3}$$

$$+4 \quad \textcircled{5}$$

$$-4 \quad \textcircled{1}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$m\vec{i} + n\vec{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix} \Rightarrow m \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} m = 2 \\ n = -8 \end{matrix}$$

$$m + n = 2 + (-8) = -6$$

۱۶۳ - حاصل عبارت روبرو کدام گزینه است؟

$$4\vec{i} - 6 \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix} - \vec{j} + \vec{i} =$$

$$35\vec{i} + 37\vec{j} \quad \textcircled{4}$$

$$37\vec{i} + 35\vec{j} \quad \textcircled{3}$$

$$35\vec{i} - 37\vec{j} \quad \textcircled{5}$$

$$37\vec{i} - 35\vec{j} \quad \textcircled{1}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$4\vec{i} - 6 \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix} - \vec{j} + \vec{i} = 5\vec{i} - \begin{bmatrix} -30 \\ 36 \end{bmatrix} - \vec{j} = 5\vec{i} + 30\vec{i} - 36\vec{j} - \vec{j} = 35\vec{i} - 37\vec{j}$$

۱۶۴ - بردار $\vec{xy}$ به مختصات $2\vec{i} - \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} -2 \\ +8 \end{bmatrix} \quad \textcircled{4}$$

$$\begin{bmatrix} +2 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ +4 \end{bmatrix} \quad \textcircled{5}$$

$$\begin{bmatrix} +2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\vec{xy} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} - 2\vec{i} \Rightarrow \vec{xy} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{xy} = \begin{bmatrix} 4 - 2 \\ -8 - 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{xy} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}$$

۱۶۵ - کدام یک از بردارهای زیر بر هم عمودند؟

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \textcircled{4}$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \textcircled{5}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

پاسخ: گزینه ۱ نکته: شرط عمود بودن دو بردار آن است که مجموع حاصل ضرب مؤلفه‌های طول با هم و حاصل ضرب مؤلفه‌های عرض با یکدیگر برابر صفر باشد. بنابراین گزینه‌ی ۱ صحیح است.

$$(3 \times 6) + (6 \times (-3)) = 18 + (-18) = 0$$

۱۶۶ - حاصل جمع دو بردار $\vec{x} = \vec{i} + \vec{j}$ و $\vec{y} = \vec{i} - \vec{j}$ برابر است با:

$$2\vec{i} \quad \textcircled{4}$$

$$2\vec{j} \quad \textcircled{3}$$

$$2\vec{i} - 2\vec{j} \quad \textcircled{5}$$

$$2\vec{i} - \vec{j} \quad \textcircled{1}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{i} + \cancel{\vec{j}} + \vec{i} - \cancel{\vec{j}} = 2\vec{i}$$

۱۶۷ - طول بردار $\vec{x} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ کدام است؟

$$-7 \quad \textcircled{4}$$

$$7 \quad \textcircled{3}$$

$$-5 \quad \textcircled{5}$$

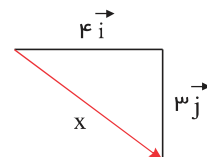
$$5 \quad \textcircled{1}$$



پاسخ: گزینه ۱

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$



۱۶۸- اگر $\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ و $\vec{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ باشد، قرینه‌ی بردار $\vec{xy}$ نسبت به نیم‌ساز ناحیه‌ی دوم و چهارم کدام است؟

- ① $-\vec{3i} + \vec{3j}$ ② $\vec{3i} - \vec{3j}$ ③ $\vec{8i} - \vec{8j}$ ④ $\vec{8i} - \vec{8j}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} = -4\vec{i} + 6\vec{j}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$$

ابتدای بردار - انتهای بردار = مختصات بردار

$$\vec{xy} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - (-4\vec{i} + 6\vec{j}) \Rightarrow \vec{xy} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{i} - 6\vec{j}$$

$$\vec{xy} = 8\vec{i} - 8\vec{j} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به نیم‌ساز ربع دوم و چهارم}} \vec{x'y} = +8\vec{i} - 8\vec{j}$$

در قرینه نسبت به نیم‌ساز ربع دوم و چهارم هم طول و عرض بردار جابجا می‌شوند و هم هر دو قرینه می‌شوند.

۱۶۹- مقدار x چه قدر باشد تا دو بردار $\vec{m} = 12\vec{i} - x\vec{j}$ و $\vec{n} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$ با هم موازی باشند؟

- ① ۲ ② -۲ ③ -۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه ۴ شرط موازی بودن دو بردار این است که نسبت طول‌های دو بردار با نسبت عرض‌های آن مساوی باشد.

$$\vec{m} = 12\vec{i} - x\vec{j} \rightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ -x \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} = 6\vec{i} - 2\vec{j} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{6}{-2} = \frac{12}{-x} \Rightarrow -6x = -2 \times 12 \Rightarrow -6x = -24 \Rightarrow \boxed{x = 4} \quad \text{یا} \quad \frac{12}{6} = \frac{-x}{-2} \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

۱۷۰- n چه قدر باشد که بردار $\vec{x} = \begin{bmatrix} -6n + 12 \\ 4n \end{bmatrix}$ موازی نیم‌ساز ربع اول و سوم باشد؟

- ① $\frac{1}{5}$ ② ۵ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{6}{5}$

پاسخ: گزینه ۴ برای این که برداری موازی نیم‌ساز ربع اول و سوم باشد بایستی نسبت مؤلفه‌ی طول به مؤلفه‌ی عرض آن برابر با یک باشد یعنی مؤلفه‌ی طول و عرض آن یکسان باشد.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -6n + 12 \\ 4n \end{bmatrix}$$

$$-6n + 12 = 4n \Rightarrow -6n - 4n = -12 \Rightarrow -10n = -12 \Rightarrow n = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

۱۷۱- اگر $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ و $\vec{b} = m\vec{i} + 2m\vec{j}$ و بدانیم $\vec{a} - \vec{b}$ در امتداد محور x ها است، آن‌گاه $\vec{a} + \vec{b}$ کدام است؟

- ① $9\vec{j}$ ② $9\vec{i}$ ③ $16\vec{i} + 9\vec{j}$ ④ $3,5\vec{i} + 6\vec{j}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} m \\ 2m \end{bmatrix} \quad (\vec{a} - \vec{b}) \xrightarrow{\text{در امتداد محور } x \text{ ها}} y = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m \\ 2m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-m \\ 3-2m \end{bmatrix} \xrightarrow{y=0} 3-2m = 0 \Rightarrow 3 = 2m \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \times \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 6 \end{bmatrix} = 3,5\vec{i} + 6\vec{j}$$



۱۷۲- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ باشد، قرینه‌ی بردار AB نسبت به نیم‌ساز ربع دوم و چهارم کدام است؟

- ① $-4\vec{i} + 4\vec{j}$ ② $4\vec{i} - 4\vec{j}$ ③ $3\vec{i} - 3\vec{j}$ ④ $-3\vec{i} + 3\vec{j}$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدای بردار - انتهای بردار $\overrightarrow{AB}$ مختصات

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2+2 \\ -1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نسبت به نیم‌ساز ربع دوم و چهارم}} \begin{bmatrix} +4 \\ -4 \end{bmatrix} = +4\vec{i} - 4\vec{j}$$

هم‌جای x و y عوض می‌شود و هم‌رد دو قرینه می‌شوند.

۱۷۳- اگر $\vec{a} = (2m-4)\vec{i} + (m+1)\vec{j}$ و بردار a موازی محور عرض‌ها باشد، $\frac{-2}{3}\vec{a} + 3\vec{i} - 2\vec{j}$ برابر است با:

- ① $+2\vec{j}$ ② $3\vec{i} - 2\vec{j}$ ③ $-3\vec{i} + 4\vec{j}$ ④ $3\vec{i} - 4\vec{j}$

پاسخ: گزینه ۴ برداری موازی محور عرض‌هاست که طول آن صفر است.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2m-4 \\ m+1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2m-4 = 0 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2(2)-4 \\ 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{2}{3}\vec{a} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{2}{3} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$$

۱۷۴- نقطه‌ی $E = \begin{bmatrix} 3x-7 \\ 3-2x \end{bmatrix}$ را که بر روی نیم‌ساز ناحیه‌ی دوم و چهارم قرار دارد، ۱۰ بار تحت بردار $\vec{x} = -2\vec{i}$ و بیست بار تحت بردار

$\vec{y} = -3\vec{j}$ انتقال می‌دهیم. نقطه‌ی حاصل کدام است؟

- ① $\begin{bmatrix} -15 \\ -65 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 65 \\ 15 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -15 \\ 65 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 15 \\ -65 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۱ اگر نقطه‌ای روی نیم‌ساز ربع دوم و چهارم باشد دارای طول و عرض قرینه است.

$$E = \begin{bmatrix} 3x-7 \\ 3-2x \end{bmatrix} \Rightarrow 3x-7 = -(3-2x) \Rightarrow 3x-7 = -3+2x \Rightarrow 3x-2x = +7-3 \Rightarrow x=4$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 \times 4 - 7 \\ 3 - 2 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12-7 \\ 3-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix} + 10 \times \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + 20 \times \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -65 \end{bmatrix}$$

۱۷۵- اندازه‌ی بردار $\vec{k} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\vec{i} - 3\vec{j}$ کدام گزینه است؟

- ① $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\vec{i} - 3\vec{j} \Rightarrow \vec{k} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{k} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{k} = \begin{bmatrix} -4+2-0 \\ 3+0-3 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{k} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۱۷۶- با توجه به تساوی مقابل بردار $\vec{x}$ کدام است؟

$$4 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} - 3x - 3\vec{j} = - \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} - 5\vec{i} - \vec{j} - 2x$$

- ① $\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -10 \\ 10 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{bmatrix} -12 \\ 8 \end{bmatrix} - 3x - 3\vec{j} = - \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} - 5\vec{i} - \vec{j} - 2x$$

$$-3x + 2x = 12\vec{i} - 8\vec{j} + 3\vec{j} + 3\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow -x = 10\vec{i} - 10\vec{j} \Rightarrow x = -10\vec{i} + 10\vec{j}$$

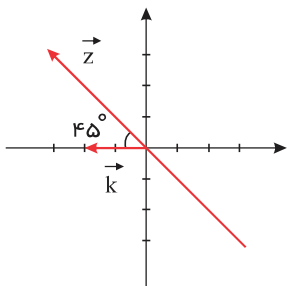


۱۷۷- زاویه بین $\vec{z} = -12\vec{i} + 12\vec{j}$ و $\vec{k} = -2\vec{i}$ چند درجه است؟

- ☐ ۹۰ (۱)
 ☐ ۴۵ (۲)
 ☐ ۳۰ (۳)
 ☐ ۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

بردار $\vec{z}$ روی نیم‌ساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارد و بردار $\vec{k}$ در جهت منفی روی محور x قرار دارد و همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود زاویه بین بردار $\vec{z}$ و $\vec{k}$ زاویه 45° درجه است.

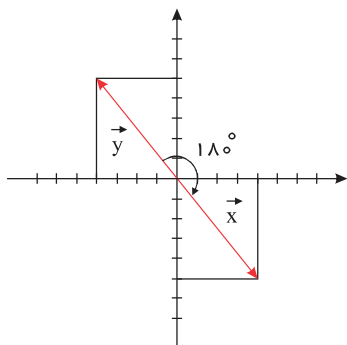


۱۷۸- زاویه بین $\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ و $\vec{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$ چند درجه است؟

- ☐ ۹۰ (۱)
 ☐ ۱۸۰ (۲)
 ☐ ۶۰ (۳)
 ☐ صفر (۴)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به مختصات دو بردار متوجه می‌شویم که دو بردار قرینه‌ی یکدیگرند بنابراین زاویه بین آن‌ها 180° خواهد بود.



۱۷۹- اگر $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{b} = -3\vec{i} - \vec{j}$ باشد، ثلث برآیند این دو بردار کدام گزینه است؟

- ☐ $2\vec{i} - 2\vec{j}$ (۱)
 ☐ $3\vec{i} - 3\vec{j}$ (۲)
 ☐ $\vec{i} - \vec{j}$ (۳)
 ☐ $6\vec{i} - 6\vec{j}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 6\vec{i} - 2\vec{j} \\ \vec{b} &= -3\vec{i} - \vec{j} \end{aligned} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\text{ثلث برآیند} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{3\vec{i} - 3\vec{j}}{3} = \vec{i} - \vec{j}$$

۱۸۰- مقدار x را در معادله‌ی مقابل به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} + 6\vec{x} - 6\vec{j} + 10\vec{i} = 0$$

- ☐ $3\vec{i} + 2\vec{j}$ (۱)
 ☐ $-3\vec{i} - 2\vec{j}$ (۲)
 ☐ $-2\vec{i} + 3\vec{j}$ (۳)
 ☐ $-3\vec{i} + 2\vec{j}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} + 6\vec{x} - 6\vec{j} + 10\vec{i} = 0 \Rightarrow (8i - 6j) + 6\vec{x} - 6j + 10i = 0 \Rightarrow 18i - 12j + 6\vec{x} = 0 \Rightarrow 6\vec{x} = -18i + 12j \Rightarrow \vec{x} = -3i + 2j$$

$$18i - 12j + 6\vec{x} = 0 \Rightarrow 6\vec{x} = -18i + 12j \Rightarrow \vec{x} = -3i + 2j$$

۱۸۱- بردار $\vec{T} = \begin{bmatrix} 3a-b \\ a+b \end{bmatrix}$ و $\vec{V} = \begin{bmatrix} 2b+1 \\ 3 \end{bmatrix}$ هم‌اندازه، موازی و مخالف جهت یکدیگر می‌باشند. مختصات $\vec{V} + 2\vec{T}$ کدام گزینه است؟

- ☐ $\begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ (۱)
 ☐ $\begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}$ (۲)
 ☐ $\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$ (۳)
 ☐ $\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} 3a - b \\ a + b \end{bmatrix}, \quad \vec{V} = \begin{bmatrix} 2b + 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

چون دو بردار $\vec{T}$ و $\vec{V}$ قرینه‌ی هم هستند. پس داریم: $\vec{T} = -\vec{V}$

$$-\begin{bmatrix} 3a - b \\ a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b + 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 2b + 1 = -(3a - b) \Rightarrow 2b + 1 = -3a + b$$

$$\Rightarrow 2b - b = -3a - 1 \Rightarrow b = -3a - 1 \Rightarrow 1 = -3a - b$$

مقدار b را در $3 = -a - b$ جای گذاری می‌کنیم.

$$3 = -a - (-3a - 1) \Rightarrow 3 = -a + 3a + 1 \Rightarrow 3 = 2a + 1 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$b = -3 \times 1 - 1 = -4$$

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} 2 \times -4 + 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{T} = -\vec{V} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V} + 2\vec{T} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

۱۸۲ - در معادله‌ی $\vec{x}i + \vec{y}j = \begin{bmatrix} +4 \\ -12 \end{bmatrix}$ حاصل $x - y$ کدام است؟

۴ (۴)

۱۶ (۳)

-۱۶ (۲)

-۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\vec{x}i + \vec{y}j = \begin{bmatrix} +4 \\ -12 \end{bmatrix} \Rightarrow x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +4 \\ -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +4 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +4 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$x = +4, y = -12 \Rightarrow x - y = 4 - (-12) = 16$$

۱۸۳ - کدام نقطه‌ی زیر می‌تواند با دو نقطه‌ی $M = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $N = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix}$ مثلث متساوی‌الساقین بسازد؟

$\begin{bmatrix} 1396 \\ 3 \end{bmatrix}$ (۴)

$\begin{bmatrix} 1396 \\ 7 \end{bmatrix}$ (۳)

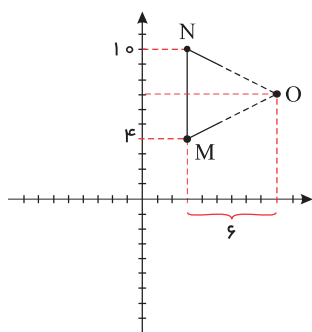
$\begin{bmatrix} 7 \\ 1396 \end{bmatrix}$ (۲)

$\begin{bmatrix} 1396 \\ 0 \end{bmatrix}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به شکل مختصات نقطه‌ی رأس مثلث حتماً می‌بایستی دارای عرض ۷ باشد زیرا تفاضل عرض‌های دو زاویه‌ی مجاور قاعده‌ی $10 - 4 = 6$ است و عرض زاویه‌ی رأس بایستی حد وسط تفاضل عرض‌های زاویه‌های مجاور قاعده باشد و گزینه‌ی ۳ دارای عرض ۷ می‌باشد.

$$\left. \begin{array}{l} 10 - 4 = 6 \\ 6 \div 2 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 4 + 3 = 7 \\ 10 - 3 = 7 \end{array}$$



$$y_O = \frac{10 + 4}{2} = 7 \rightarrow (3) \text{ فقط گزینه } (3)$$

۱۸۴ - نقطه‌ی M وسط نقاط $\begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ است. قرینه‌ی نقطه‌ی M نسبت به نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ کدام گزینه است؟

$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ (۴)

$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ (۳)

$\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$ (۲)

$\begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ با توجه به این نکته که مؤلفه‌ی نقطه‌ی وسط این دو نقطه برابر است با میانگین مؤلفه‌های طول و عرض آن دو نقطه. بنابراین:

$$x_M = \frac{-5 + 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

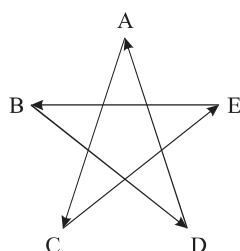
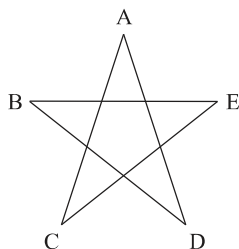
$$y_M = \frac{-6 + 12}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$M \text{ مختصات نقطه‌ی } = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$



قرینه نسبت به نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به نقطه‌ی } \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}} M' = 2A - M = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$



۱۸۵ - با توجه به شکل کدام رابطه صحیح است؟

① $\vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD} - \vec{BD} - \vec{EB}$

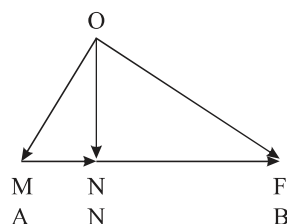
② $\vec{AC} - \vec{CE} = \vec{AD} + \vec{BD} - \vec{EB}$

③ $\vec{AC} + \vec{CE} + \vec{EB} = \vec{AB} + \vec{BD}$

④ $\vec{AC} + \vec{CE} + \vec{EB} = \vec{AD} - \vec{BD}$

پاسخ: گزینه ۴

جهت بردارها در شکل به این صورت است. پس: $\vec{AC} + \vec{CE} + \vec{EB} = \vec{AD} - \vec{BD}$



② $\vec{OM} + \vec{OF} = \vec{ON}$

④ $\vec{OM} + \vec{OF} = \vec{ON}$

① $\vec{OM} + \vec{OF} = \vec{ON}$

③ $\vec{OM} + \vec{OF} = \vec{ON}$

پاسخ: گزینه ۲

۱۸۶ - در شکل مقابل اگر $MN = \frac{1}{5}NF$ کدام گزینه صحیح است؟

$$\begin{cases} \vec{ON} = \vec{OM} + \vec{MN} \\ \vec{ON} = \vec{OF} + \vec{FN} \end{cases} \xrightarrow{\times 5} \begin{cases} 5\vec{ON} = 5\vec{OM} + 5\vec{MN} \\ 5\vec{ON} = 5\vec{OF} + 5\vec{FN} \end{cases} \rightarrow 6\vec{ON} = 5\vec{OM} + \vec{OF} + 5\vec{MN} + \vec{FN}$$

$$\vec{MN} = \frac{1}{5}\vec{NF} \Rightarrow \vec{NF} = 5\vec{MN} \rightarrow 5\vec{MN} - \vec{NF} = \vec{0} \rightarrow 5\vec{MN} + \vec{FN} = \vec{0}$$

باتوجه به این که $\vec{MN} = \frac{1}{5}\vec{NF}$ داریم:

$6\vec{ON} = 5\vec{OM} + \vec{OF}$

۱۸۷ - اگر $\vec{x} = (2m - 4)\vec{i} + (m + 1)\vec{j}$ باشد و بردار $\vec{x}$ موازی محور عرض‌ها باشد، $-\frac{2}{3}\vec{x} + 3\vec{i} - 2\vec{j}$ برابر است با:

④ $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۴

* اگر برداری موازی محور عرض‌ها باشد مؤلفه‌ی طول آن صفر است.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2m - 4 \\ m + 1 \end{bmatrix} \rightarrow 2m - 4 = 0 \rightarrow 2m = 4 \rightarrow m = 2 \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 - 4 \\ 2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{2}{3}\vec{x} + 3\vec{i} - 2\vec{j} \rightarrow -\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\vec{i} - 2\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

۱۸۸ - به ازاء چه مقداری از x برآیند (مجموع) دو بردار $\vec{T} = (\frac{2}{3}x - 1)\vec{i} - \vec{j}$ و $\vec{W} = (\frac{1}{3}x\vec{i} - 2x\vec{j})$ موازی با محور طول‌هاست؟

④ $\frac{3}{2}$

③ $-\frac{1}{2}$

⑤ -1

① 1

پاسخ: گزینه ۳ برداری که موازی محور طول‌هاست، عرض آن صفر است.



$$\vec{W} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x \\ -2x \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x - 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{T} + \vec{W} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x - 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x \\ -2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 1 \\ -1 - 2x \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{عرض}]{\text{موازی محور طولها}} -1 - 2x = 0$$

$$\rightarrow -2x = 1 \rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

۱۸۹- اگر بردار $\vec{j} - 2\vec{i}$ را به دو بردار $\vec{xj} + \vec{yi}$ تجزیه کنیم. حاصل $x^2 - y^2$ کدام است؟

۲۸ (۴)

۳۶ (۳)

۷ (۲)

۱۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ در واقع مجموع دو بردار $\vec{xj} + \vec{yi} = \vec{j} - 2\vec{i}$ خواهد بود.

پس داریم:

$$\vec{xj} + \vec{yi} + \vec{j} - \vec{xj} = \vec{j} - 2\vec{i}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x + 1 = 1 \rightarrow x = 0$$

$$y - 2 = -2 \rightarrow y = 0 \rightarrow y - 2 = -2 \rightarrow y = 0 \rightarrow y = 0 - 2 = -2 \rightarrow x^2 - y^2 = 0 - 4 = -4$$

۱۹۰- برآیند سه بردار $\vec{T} = \vec{j} - 2\vec{i}$ ، $\vec{V} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ و $\vec{W} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ کدام گزینه است؟

۳۱ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\vec{T} + \vec{V} + \vec{W} = \vec{j} - 2\vec{i} + \frac{-\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \rightarrow \vec{T} + \vec{V} + \vec{W} = \vec{j}$$

۱۹۱- زاویه‌ای که برآیند سه بردار $\vec{x} = -\frac{11}{2}\vec{i} + \vec{j}$ و $\vec{y} = \vec{i} - 5\vec{j}$ و $\vec{z} = \frac{11}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ با قسمت مثبت محور عرض‌ها می‌سازد چند درجه است؟

۹۰ (۴)

۶۰ (۳)

۴۵ (۲)

۳۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا مختصات بردار برآیند را بدست می‌آوریم.

$$\vec{z} + \vec{y} + \vec{x} = \frac{11}{2}\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{i} - 5\vec{j} + (-\frac{11}{2}\vec{i} + \vec{j}) = \vec{j} - 9\vec{j} = -8\vec{j}$$

$$\vec{z} + \vec{y} + \vec{x} = \frac{11}{2}\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{i} - 5\vec{j} + (-\frac{11}{2}\vec{i} + \vec{j}) = \vec{j} - 9\vec{j} = -8\vec{j}$$

چون مؤلفه‌ی طول و عرض بردار برآیند با هم برابر است پس روی نیم‌ساز ربع اول قرار دارد. پس زاویه‌ی آن با محور عرض‌ها 45° درجه است.

۱۹۲- اگر مختصات ابتدا و انتهای یک بردار به ترتیب $\begin{bmatrix} 9\sqrt{6} \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 8\sqrt{6} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$ باشد، با محور افقی چه زاویه‌ای تشکیل می‌دهد؟

۹۰ (۴)

۴۵ (۳)

۶۰ (۲)

۳۰ (۱)

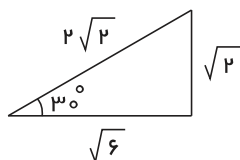
پاسخ: گزینه ۱

ابتدای بردار = طول بردار - انتهای بردار

$$\begin{bmatrix} 9\sqrt{6} \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8\sqrt{6} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{اندازه بردار}} \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6 + 2} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه زاویه‌ی روبه‌رو به 30° درجه نصف وتر است. با توجه به نکته‌ی بالا این بردار با محور افقی زاویه‌ی 30° تشکیل می‌دهد.





۱۹۳- اگر $\vec{x} = -\vec{i} + 5\vec{j}$ و $\vec{y} = 2\vec{j} - \vec{i}$ و $\vec{z} = -3\vec{i} - \vec{j}$ و $\vec{z} = s\vec{x} - r\vec{y}$ آن گاه $\frac{s}{r}$ کدام گزینه است؟

④ $-\frac{16}{7}$

③ $-\frac{7}{16}$

⑤ $\frac{16}{7}$

① $\frac{7}{16}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} \vec{x} = -\vec{i} + 5\vec{j} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \vec{y} = 2\vec{j} - \vec{i} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \vec{z} = -3\vec{i} - \vec{j} &= \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{z} = s\vec{x} - r\vec{y}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s + r \\ 5s - 2r \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -s + r = -3 \rightarrow s = r + 3 \\ 5s - 2r = -1 \rightarrow 2r = 5s + 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow 2r = 5(r + 3) + 1 \rightarrow 2r - 5r = 15 + 1 \rightarrow r = -\frac{16}{3} \rightarrow s = -\frac{16}{3} + 3 = -\frac{7}{3}$$

$$\frac{s}{r} = \frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{16}{3}} = \frac{7}{16}$$

۱۹۴- به ازای چه مقدار n ، مجموع دو بردار $\vec{e} = 3\vec{i} + (n-1)\vec{j}$ و $\vec{b} = n\vec{i} + (3n+4)\vec{j}$ با محور طول موازی است؟

④ $-\frac{5}{4}$

③ $\frac{5}{4}$

⑤ $\frac{3}{4}$

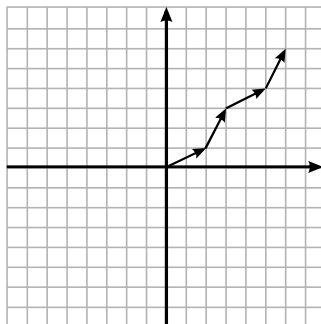
① $-\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه ۱ برداری که با محور طول موازی باشد، طول دارد ولی عرضش صفر است. داریم:

$$\vec{e} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ n-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 3n+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+n \\ 4n+3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{عرض} = 0} 4n+3 = 0 \Rightarrow n = -\frac{3}{4}$$

$$\text{طول } 3 + \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{12-3}{4} = \frac{9}{4}$$

۱۹۵- الگوی حرکت یک خودروی بدون سرنشین مطابق شکل زیر است، این خودرو پس از حرکت ۴۰م در چه نقطه‌ای قرار دارد؟



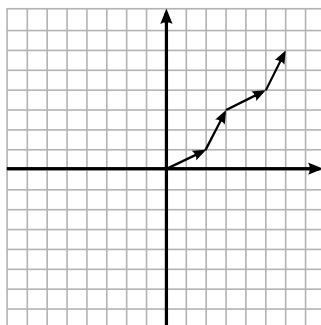
① $\begin{bmatrix} 40 \\ 80 \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} 60 \\ 60 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 80 \\ 40 \end{bmatrix}$

④ $\begin{bmatrix} 120 \\ 120 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲ با توجه به الگوی شکل، نصف حرکات به صورت $\vec{i} + 2\vec{j}$ و نصف آنها به صورت $2\vec{i} + \vec{j}$ می‌باشد. بنابراین پس از ۴۰ حرکت، ۲۰ حرکت از نوع اول و ۲۰ حرکت از نوع دوم داریم، پس:





از مبدأ مختصات پس از ۴۰ حرکت به این نقطه می‌رسیم $\Rightarrow \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \end{bmatrix} = 60\vec{i} + 60\vec{j} = (20\vec{i} + 40\vec{j}) + (40\vec{i} + 20\vec{j}) = 20(\vec{i} + 2\vec{j}) + 40(\vec{i} + \vec{j})$

۱۹۶- اگر $\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\vec{a} - \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $\vec{b}$ کدام است؟

④ $-3\vec{i} + \vec{j}$

③ $\vec{i} + 3\vec{j}$

⑤ $3\vec{i} + \vec{j}$

① $-\vec{i} + 3\vec{j}$

پاسخ: گزینه ۳ دو معادله را با هم جمع می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \vec{a} + (-\vec{b}) &= \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + (-\vec{b}) = 2\vec{a} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{a} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حال بردار $\vec{a}$ را در یکی از معادلات نوشته شده، جایگذاری می‌کنیم و بردار $\vec{b}$ را به دست می‌آوریم.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

پس بردار $\vec{b}$ برابر با $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ یا همان $\vec{i} + 3\vec{j}$ است.

۱۹۷- با توجه به معادله زیر، بردار $\vec{x}$ برابر با کدام گزینه خواهد بود؟

$$-6\vec{i} + 4\vec{j} = \frac{2}{3}\vec{x} - \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

④ $\begin{bmatrix} -12 \\ 12 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} 12 \\ -12 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۴ معادله را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$-6\vec{i} + 4\vec{j} = \frac{2}{3}\vec{x} - \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\vec{x} - \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\vec{x} \Rightarrow \begin{bmatrix} -6-2 \\ 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\vec{x} \xrightarrow{\times \frac{3}{2}} \frac{3}{2} \times \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \end{bmatrix} = \vec{x}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \times \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 12 \end{bmatrix} = \vec{x}$$

۱۹۸- اگر $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ ، $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ و $\vec{a} + \vec{b} = \vec{x}$ باشند، برآیند کدام بردار با بردار $\vec{x}$ ، خطی موازی یکی از محورهای مختصات است؟

④ $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

① $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا بردار $\vec{x}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + (-3\vec{i}) + 2\vec{j} = \vec{i} + 4\vec{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

حال باید این بردار با برداری جمع شود که در بردار حاصل طول یا عرض آن صفر شود. بنابراین گزینه ۳، صحیح است.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{موازی محور } x \text{ ها}$$

۱۹۹- اختلاف ضریب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ در بردار x معادله برداری زیر چقدر است؟

$$3\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

④ ۴

③ ۳

⑤ ۵

① ۱



پاسخ: گزینه ۲

$$3\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -3\vec{i} + 5\vec{j} \Rightarrow 2\vec{x} = (-3\vec{i} + 5\vec{j}) - (3\vec{i} + \vec{j}) = -6\vec{i} + 4\vec{j} \Rightarrow \vec{x} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$$

اختلاف ضریب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ در بردار $\vec{x}$ $2 - (-3) = 5 \leftarrow$

۲۰۰ - یک ربات که در نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ قرار دارد، به ترتیب با بردارهای $3\vec{i} + 4\vec{j}$ ، $3\vec{i} - 7\vec{j}$ و $3\vec{i} - y\vec{j}$ حرکت کرده و به نقطه $\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ می‌رسد. حاصل

 $x^2 + xy$ کدام است؟

۷ (۴)

۵۵ (۳)

۱۲ (۲)

۵۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا مقدار x را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + (x\vec{i} + 4\vec{j}) + (3\vec{i} - 7\vec{j}) + (3\vec{i} - y\vec{j}) = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 + x + 3 + 3 \\ -2 + 4 - 7 - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 9 = 8 \Rightarrow x = -1 \\ -5 - y = 6 \Rightarrow y = -11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow xy + x^2 = (-1)(-11) + (-1)^2 = 11 + 1 = 12$$

۱ - ۲۰ در کدام گزینه، x و y هم علامت هستند؟

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x - 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -y + 1 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} 4x + 11 \\ -8x + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ y + 1 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x - 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -y + 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2x - 4 = 3 \Rightarrow 3x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{3} > 0 \\ y + 8 = -y + 1 \Rightarrow 2y = -7 \Rightarrow y = -\frac{7}{2} < 0 \end{cases}$$

گزینه ۲:

$$\begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 15 + 3x = -2 \Rightarrow 3x = -17 \Rightarrow x = -\frac{17}{3} < 0 \\ 5 + y = 8 \Rightarrow y = 3 > 0 \end{cases}$$

گزینه ۳:

$$\begin{bmatrix} 4x + 11 \\ -8x + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ y + 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 11 = 19 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2 > 0 \\ (-8)(2) + 1 = y + 1 \Rightarrow -15 = y + 1 \Rightarrow y = -16 < 0 \end{cases}$$

گزینه ۴:

$$\begin{bmatrix} 5 - x \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3y + 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5 - x + 1 = 7 \Rightarrow x = -1 < 0 \\ -1 + 1 = 3y + 3 \Rightarrow 3y = -3 \Rightarrow y = -1 < 0 \end{cases}$$

۲۰۲ - اگر $\vec{AB} + 5\vec{i} - 8\vec{j} = \vec{CD}$ ، $\vec{CD} = \begin{bmatrix} 2x - 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $\vec{AB} = \begin{bmatrix} x + 5 \\ y + 4 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\vec{BA} - \vec{DC}$ چه خواهد بود؟

$$5\vec{i} - 8\vec{j} \quad (۴)$$

$$-17\vec{i} + \vec{j} \quad (۳)$$

$$6\vec{i} - 23\vec{j} \quad (۲)$$

$$-18\vec{i} - 10\vec{j} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\vec{AB} + \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \vec{CD} \Rightarrow \begin{bmatrix} x + 5 \\ y + 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 5 + 5 = 2x - 3 \Rightarrow x = 13 \\ y + 4 - 8 = 5 \Rightarrow y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{AB} = \begin{bmatrix} 18 \\ 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{BA} = \begin{bmatrix} -18 \\ -13 \end{bmatrix} \\ \vec{CD} = \begin{bmatrix} 23 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{DC} = \begin{bmatrix} -23 \\ -5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\vec{BA} - \vec{DC} = \begin{bmatrix} -18 \\ -13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -23 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = 5\vec{i} - 8\vec{j}$$

۲۰۳ - اگر بردار $\vec{a}$ را ۴ برابر کرده و با بردار $2\vec{j} + 8\vec{i}$ جمع کنیم، بردار $\vec{b}$ ساخته می‌شود. حال اگر بردار $\vec{b}$ را ۲ برابر کرده و با بردار $2\vec{i}$ جمع کنیم، بردار $12\vec{j} + 4\vec{i}$ به دست می‌آید. حاصل $\vec{a} + \vec{b}$ کدام است؟

$$4\vec{i} + 6\vec{j} \quad (۴)$$

$$3\vec{i} + 7\vec{j} \quad (۳)$$

$$-\frac{7}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j} \quad (۲)$$

$$-4\vec{i} - 6\vec{j} \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} \vec{b} + 2\vec{i} &= 10\vec{i} + 12\vec{j} \Rightarrow 2\vec{b} = 8\vec{i} + 12\vec{j} \Rightarrow \vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} \\ 4\vec{a} + 8\vec{i} + 2\vec{j} &= \vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} \Rightarrow 4\vec{a} = -4\vec{i} + 4\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{a} + \vec{b} &= -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{i} + 6\vec{j} = 3\vec{i} + 7\vec{j} \end{aligned}$$

۲۰۴- اگر طول بردار $4\vec{j} + 3\vec{i}$ برابر a و طول بردار $4\vec{j} - 3\vec{i}$ برابر b باشد، آنگاه $a + b$ کدام است؟

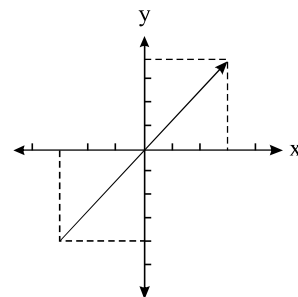
۷ (۴)

۱۴ (۳)

صفر (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ طول بردار $4\vec{j} + 3\vec{i}$ برابر وتر مثلثی قائم‌الزاویه به اضلاع ۳ و ۴ است.



طول بردار $4\vec{j} - 3\vec{i}$ نیز برابر وتر مثلثی قائم‌الزاویه به اضلاع ۳ و ۴ است.

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= a^2 \\ a^2 &= 25 \Rightarrow a = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &\Rightarrow b^2 = 25 \Rightarrow b = 5 \\ a + b &= 5 + 5 = 10 \end{aligned}$$

۲۰۵- اگر $\begin{bmatrix} 4 \\ 3a \end{bmatrix} = 2a\vec{i} + 2\vec{j} + \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ پس از ۱۰ بار حرکت با بردار $\begin{bmatrix} 2a \\ b \end{bmatrix}$ به کدام نقطه می‌رسیم؟

 $\begin{bmatrix} 22 \\ 24 \end{bmatrix}$ (۴)

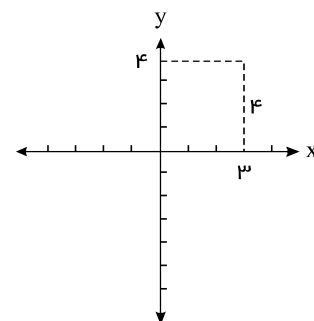
 $\begin{bmatrix} 24 \\ 22 \end{bmatrix}$ (۳)

 $\begin{bmatrix} 22 \\ -24 \end{bmatrix}$ (۲)

 $\begin{bmatrix} -24 \\ -22 \end{bmatrix}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:



$$\begin{aligned} 2a\vec{i} + 2\vec{j} &= \begin{bmatrix} 2a \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2a \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 3a \end{bmatrix} \\ \Rightarrow 2 + a &= 3a \Rightarrow 2 = 2a \Rightarrow a = 1 \\ 2a + b &= 4 \Rightarrow 2 + b = 4 \Rightarrow b = 2 \end{aligned}$$

بردار $\begin{bmatrix} 2a \\ b \end{bmatrix}$ به ازای $a = 1$ و $b = 2$ برابر $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ خواهد بود و با ۱۰ بار حرکت با این بردار، مانند این است که در کل یک بار با بردار $\begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$ حرکت کرده‌ایم. بنابراین:

$$\text{نقطه انتهایی} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 24 \end{bmatrix}$$

۲۰۶- بردارهای a ، b و c مفروض‌اند. اگر دو بردار a و b قرینه یک‌دیگر باشند، مجموع بردارهای a و c کدام است؟

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 3\vec{i} - (m-3)\vec{j} \\ \vec{b} &= (n+4)\vec{i} + 2\vec{j} \\ \vec{c} &= m\vec{i} - (n-2)\vec{j} \end{aligned}$$

 $\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$ (۴)

 $\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$ (۳)

 $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ (۲)

 $\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -(m-3) \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} n+4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

چون صورت سوال گفته a و b قرینه یک‌دیگرند، داریم:



$$3 = -(n + 4) \Rightarrow 3 = -n - 4 \Rightarrow n = -7$$

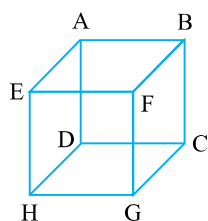
$$-(m - 3) = -2 \Rightarrow -m + 3 = -2 \Rightarrow m = 5$$

پس داریم:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

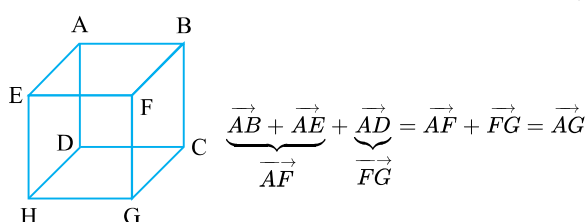
$$\vec{c} = \begin{bmatrix} m \\ -(n - 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

۲۰۷- در مکعب مقابل $\vec{AB} + \vec{AE} + \vec{AD}$ کدام است؟

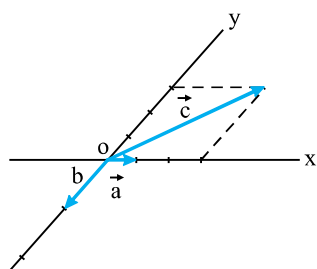


- ① $\vec{AG}$
- ② $\frac{2}{3}\vec{AG}$
- ③ $\vec{AN}$ (N وسط FG)
- ④ هیچ کدام

پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم $\vec{AB} + \vec{AE} = \vec{AF}$ و به جای $\vec{AD}$ همسنگ آن یعنی $\vec{FG}$ را استفاده می‌کنیم و داریم:



۲۰۸- تجزیه شده بردار $\vec{c}$ روی دو محور x و y انجام می‌شود. بخشی که روی محور y است، معادل کدام بردار است؟

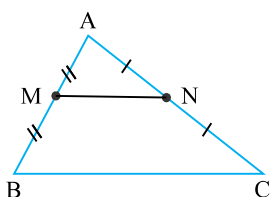


- ① $3\vec{a}$
- ② $3\vec{b}$
- ③ $-3\vec{b}$
- ④ $-3\vec{a}$

پاسخ: گزینه ۳ پاسخ منته:

طبق تجزیه بردار در شکل، تجزیه بردار $\vec{c}$ روی محور y ، سه واحد است و از آنجا که جهت بردار یک $\vec{b}$ به سمت پایین در نظر گرفته شده، حرکت به سمت جهت بالا علامت منفی می‌گیرد: $-3\vec{b}$

۲۰۹- در مثلث ABC ، M و N وسط دو ساق هستند، در این صورت:



- ① $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$
- ② $\vec{MN} = \frac{2}{3}\vec{BC}$
- ③ $\vec{MN} + \vec{BC} = \vec{0}$
- ④ $3\vec{MN} + \vec{CB} = \vec{0}$

پاسخ: گزینه ۱

در راه حل زیر به روش برداری ثابت می‌کنیم که پاره‌خطی که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند نصف قاعده است:

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = 2\vec{MA} + 2\vec{AN} = 2(\vec{MA} + \vec{AN}) = 2\vec{MN} \Rightarrow \vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$$

حالا چون $\vec{BC} = 2\vec{MN}$ یعنی $\vec{BC}$ مضرب صحیحی از $\vec{MN}$ است یعنی $\vec{BC}$ و $\vec{MN}$ دو بردار موازی هستند. به این ترتیب نکته هندسی زیر نتیجه می‌شود: اگر پاره‌خطی وسط دو ساق را به هم وصل کند، موازی قاعده و برابر با نصف آن است.

۲۱۰- از نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ روی صفحه مختصات، ۹ واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت بالا حرکت می‌کنیم تا به نقطه‌ای برسیم که هر یک از طول و عرض، ۴ مرتب نصف طول و عرض نقطه A است. نقطه A را با چه برداری می‌توان به نقطه $\begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix}$ منتقل کرد؟

- ① $-2\vec{i} + 2\vec{j}$
- ② $4\vec{i} - 11\vec{j}$
- ③ $-8\vec{i} + 11\vec{j}$
- ④ $2\vec{i} - 10\vec{j}$

پاسخ: گزینه ۲



$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - 9\vec{i} + 2\vec{j} = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A = 2 \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -12 \\ 14 \end{bmatrix} + \text{بردار} = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{بردار} = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -11 \end{bmatrix} = 4\vec{i} - 11\vec{j}$$

۲۱۱- اگر در بردار $a\vec{i} + b\vec{j}$ ، $a < 0$ و $b > 0$ باشد، شکل تقریبی بردار به کدام صورت است؟

- ☐ ① ☐ ② ☐ ③ ☐ ④

پاسخ: گزینه ۴ طول بردار منفی است پس انتهای بردار باید به سمت چپ باشد. عرض بردار مثبت است پس انتهای بردار باید به سمت بالا باشد. بنابراین شکل تقریبی بردار به صورت $\nwarrow$ خواهد بود.

۲۱۲- اگر نقطه $C = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ انتقال یافته نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ تحت بردار $\overrightarrow{AB}$ باشد، با ۲ برابر بردار $\overrightarrow{BA}$ از نقطه‌ای با طول ۹ که روی محور x ها واقع شده است، به نقطه F خواهیم رسید. از مبدأ مختصات با چه برداری می‌توان به نقطه F رسید؟

- ☐ ① $4\vec{j}$ ☐ ② $6\vec{j} - \vec{i}$ ☐ ③ $4\vec{i}$ ☐ ④ $6\vec{j} - 4\vec{i}$

گزینه ۲: پاسخ

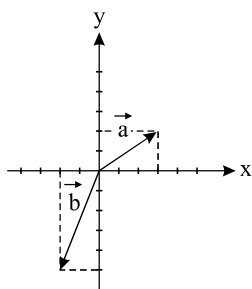
$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} + \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \times \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

برای این که ببینیم از مبدأ مختصات، با چه برداری به نقطه F می‌رسیم، نقطه ابتدای بردار را $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و انتهای آن را F در نظر می‌گیریم

$$\begin{bmatrix} -10 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow F = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} = -\vec{i} + 6\vec{j}$$

۲۱۳- اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به صورت شکل زیر باشند، $\vec{a} - \vec{b}$ کدام است؟



- ☐ ① $3\vec{j} - \vec{i}$ ☐ ② $5\vec{i} - 3\vec{j}$ ☐ ③ $5\vec{i} + 7\vec{j}$ ☐ ④ $7\vec{j} + \vec{i}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j} \rightarrow \vec{a} - \vec{b} = (3\vec{i} + 5\vec{j}) - (-2\vec{i} - 5\vec{j}) = 5\vec{i} + 7\vec{j}$$

$$\vec{b} = -2\vec{i} - 5\vec{j}$$

۲۱۴- اگر نقطه $A = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ را با بردار $2\vec{i} - 4\vec{j}$ منتقل کنیم، به چه نقطه‌ای می‌رسیم؟

- ☐ ① $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ☐ ② $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ☐ ③ $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ☐ ④ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$A + \vec{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

۲۱۵- اگر نقطه $A = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ روی دایره‌ای به مرکز $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ باشد، قطر این دایره برابر است با:

- ☐ ① ۵ ☐ ② ۱۰ ☐ ③ $\sqrt{29}$ ☐ ④ $2\sqrt{29}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\text{شعاع دایره: } \sqrt{(2+3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

$$\text{قطر دایره: } 2\sqrt{29}$$



۲۱۶- از مبدأ مختصات توسط بردار $\vec{j}(4+2y) + \vec{i}(2x-6)$ به نقطه A می‌رسیم. اختلاف x و y چقدر باشد تا نقطه A از دو محور مختصات در ربع اول و سوم به یک فاصله باشد؟

۱۲ (۴)

۴ (۳)

۵ (۷)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ برای این که نقطه داده شده از دو محور مختصات در ربع اول و سوم به یک فاصله باشد، باید طول و عرضش با یکدیگر برابر باشند. بنابراین داریم:

$$2x - 6 = 4 + 2y \rightarrow 2x - 2y = +10 \rightarrow x - y = +5$$

پس اختلاف x و y برابر ۵ خواهد بود.

۲۱۷- اگر $\vec{a} = 3\vec{j} + 4\vec{j}$ و $\vec{b} = -2\vec{a}$ باشد، بردار x برابر کدام گزینه خواهد بود؟

$$\vec{x} = -2\vec{a} + \vec{b}$$

(۴) $-6\vec{i} - 8\vec{j}$

(۳) $-12\vec{i} - 16\vec{j}$

(۷) صفر

(۱) $3\vec{i} + 4\vec{j}$

پاسخ: گزینه ۳ چون $\vec{b} = -2\vec{a}$ است، پس $\vec{x} = -2\vec{a} - 2\vec{a} = -4\vec{a}$ می‌شود و همچنین بردار $\vec{x}$ به صورت بردارهای واحد برابر است با:

$$\vec{x} = -4\vec{a} = -4 \times (3\vec{i} + 4\vec{j}) = -12\vec{i} - 16\vec{j}$$

۲۱۸- اگر $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ باشد، آن‌گاه $2\vec{a} + \vec{b}$ کدام است؟

(۴) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(۷) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(۱) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲

$$2\vec{a} + \vec{b} = 2(\vec{i} + \vec{j}) + (\vec{i} - \vec{j}) = 3\vec{i} + \vec{j} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۲۱۹- x و y کدام باشند تا بردار حاصل عبارت زیر در جهت منفی محور x ها باشد؟

$$-2\vec{i} + 3\vec{j} + \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(۴) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$

(۳) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$

(۷) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

(۱) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$

پاسخ: گزینه ۱ با توجه به صورت سؤال، مؤلفه بردار حاصل در راستای عمودی باید صفر باشد:

$$-2\vec{i} + 3\vec{j} + \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + y + 2 \\ 3 + x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 3 + x \end{bmatrix}$$

$$3 + x = 0 \Rightarrow x = -3$$

همچنین مؤلفه بردار در راستای افقی عددی منفی است. پس y باید مقداری منفی باشد.

۲۲۰- کدام گزینه می‌تواند بردار شکل تقریبی زیر باشد؟



(۴) $2\vec{i} - 3\vec{j} - \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

(۳) $-2\vec{i} + 3\vec{j} - \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

(۷) $-2\vec{i} - 3\vec{j} - \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

(۱) $2\vec{i} + 3\vec{j} - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲ گزینه ۱:

$$2\vec{i} + 3\vec{j} - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \nearrow$$

گزینه ۲:

$$-2\vec{i} - 3\vec{j} - \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \searrow$$

گزینه ۳:

$$-2\vec{i} + 3\vec{j} - \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} \nwarrow$$

گزینه ۴:

$$2\vec{i} - 3\vec{j} - \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

۲۲۱- اگر $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j}$ و $\vec{b} = 2\vec{a} + \vec{b}$ باشند، حاصل $2\vec{i} + \vec{c}$ کدام است؟

(۴) $2\vec{b} - 4\vec{i}$

(۳) $4\vec{a} + 2\vec{i}$

(۷) $2\vec{a}$

(۱) $4\vec{b} + 3\vec{i}$

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j}, \vec{b} = 2\vec{a} = 2(3\vec{i} - 6\vec{j})$$

$$\vec{b} = 6\vec{i} - 12\vec{j}, \vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b} = 2(3\vec{i} - 6\vec{j}) + 6\vec{i} - 12\vec{j} = 12\vec{i} - 24\vec{j} \Rightarrow \vec{c} + 2\vec{i} = 12\vec{i} - 24\vec{j} + 2\vec{i} = 14\vec{i} - 24\vec{j} = 4\vec{a} + 2\vec{i}$$

۲۲۲- بردارهای $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{j}$ چه زاویه‌ای باهم می‌سازند؟

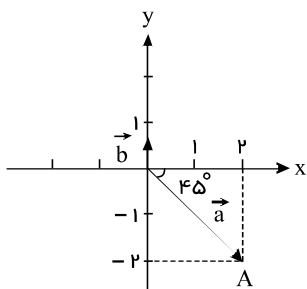
۱۳۵° (۴)

۶۵° (۳)

۹۰° (۲)

۴۵° (۱)

پاسخ: گزینه ۴



$$\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \frac{2}{3}\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

توجه شود که بردار $\vec{a}$ با قسمت مثبت محور x زاویه ۴۵ درجه می‌سازد؛ زیرا اگر از نقطه A به محور x عمود کنیم، یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائم مساوی ۲ به دست می‌آید. بنابراین مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است پس زاویه ۴۵ درجه است. پس:

$$\vec{b}, \vec{a} \text{ زاویه دو بردار } = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

۲۲۳- بردار $\vec{x}$ در معادله برداری زیر، کدام است؟

$$6\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

 $\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ (۴)

 $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ (۳)

 $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ (۲)

 $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$6\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۲۲۴- اگر نقطه $A = \begin{bmatrix} x \\ 5 \end{bmatrix}$ را با بردار $11\vec{j} + 4\vec{i}$ منتقل کنیم به نقطه $\vec{a}$ منتقل کنیم به نقطه $B = \begin{bmatrix} -2 \\ y \end{bmatrix}$ می‌رسیم. حاصل $x + y$ کدام است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

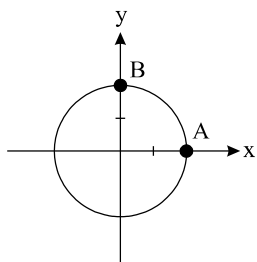
۷ (۲)

-۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{bmatrix} x \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 4 = -2 \\ 5 + 11 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 16 \end{cases} \Rightarrow x + y = 10$$

۲۲۵- متحرکی روی دایره زیر از نقطه A به نقطه B می‌رود. اگر این متحرک می‌خواست به صورت مستقیم از A به B برود، بردار انتقال او کدام بود؟


 $-2\vec{i} + 2\vec{j}$ (۱)

 $2\vec{i} + 2\vec{j}$ (۲)

 $3\vec{i} + 2\vec{j}$ (۳)

 $-\vec{i} + \vec{j}$ (۴)

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$$



۲۲۶- نقطه‌ای با مختصات $\begin{bmatrix} 16 \\ -12 \end{bmatrix}$ را با کدام بردار می‌توان به نقطه‌ای با مختصات قرینه آن نسبت به محور x ها منتقل کرد؟

۲۲ $\vec{i}$ (۴)

۲۲ $\vec{j}$ (۳)

۲۴ $\vec{j}$ (۵)

۲۴ $\vec{i}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{bmatrix} 16 \\ -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{به محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت}} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{بردار انتقال} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix} = 24\vec{j}$$

۲۲۷- اگر $\vec{x} = 5\vec{j}$ و $\vec{y} = \vec{i} + \vec{j}$ باشد، مختصات بردار حاصل جمع بردارهای x و y کدام گزینه است؟

$\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ (۴)

$\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ (۳)

$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ (۵)

$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\vec{x} = 5\vec{j} = 5 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \vec{i} + \vec{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

۲۲۸- اگر بردار $\vec{t} = \begin{bmatrix} 3n-2 \\ n+1 \end{bmatrix}$ با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه‌ی 45° درجه بسازد، n کدام گزینه است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

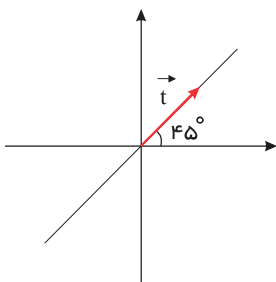
$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۵)

$\frac{3}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

وقتی برداری با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه‌ی 45° درجه بسازد روی نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم قرار دارد، پس طول و عرض آن با هم برابر است. بنابراین:



$$\vec{t} = \begin{bmatrix} 3n-2 \\ n+1 \end{bmatrix} \Rightarrow 3n-2 = n+1 \Rightarrow 3n-n = +2+1 \Rightarrow 2n=3 \Rightarrow n = \frac{3}{2}$$

۲۲۹- اگر $\vec{a} = (x-7)\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ و $\vec{b} = -5\vec{i} + (\frac{3n-2}{3})\vec{j}$ نسبت به محور طول‌ها قرینه باشند اندازه‌ی $\vec{a} + \vec{b}$ کدام است؟

$+10\vec{i}$ (۴)

$-10\vec{i}$ (۳)

$10\vec{i} + \vec{j}$ (۵)

$-10\vec{i} - \vec{j}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ وقتی دو بردار نسبت به محور طول‌ها قرینه باشند مؤلفه‌های طولشان یکسان و مؤلفه‌های عرضشان با هم قرینه خواهد بود. پس خواهیم داشت:



$$\vec{a} = (x - 7)\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} = \begin{bmatrix} x - 7 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = -5\vec{i} + \left(\frac{3n - 2}{3}\right)\vec{j} = \begin{bmatrix} -5 \\ \frac{3n - 2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 7 = -5 \rightarrow x = 7 - 5 = 2 \\ \frac{1}{2} = -\frac{3n - 2}{3} \rightarrow 3 = -6n + 4 \rightarrow 6n = 4 - 3 = 1 \rightarrow n = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 - 7 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ \frac{3(\frac{1}{6}) - 2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ \frac{\frac{1}{2} - 2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ \frac{-\frac{3}{2}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix} = -10\vec{i}$$

۲۳- اگر $\vec{S} = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \end{bmatrix}$ باشد و زاویه‌ای که بردار $\vec{r}$ در ناحیه‌ی اول با جهت مثبت محور عرض‌ها می‌سازد ۳۸ درجه باشد اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو

بردار $\vec{S}$ و $\vec{r}$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت چند درجه است؟

۷۸ (۴)

۱۷۳ (۳)

۴۵ (۲)

۱۳۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به مختصات بردار $\vec{S}$ ملاحظه می‌شود که: بردار $\vec{S}$ روی نیم‌ساز ناحیه‌ی دوم و چهارم واقع است و زاویه‌ای که با محور طول‌ها و عرض‌ها می‌سازد ۴۵ درجه است.

بنابراین زاویه‌ی بین بردار $\vec{S}$ و $\vec{r}$ برابر خواهد بود با:

$$38 + 45 + 90 = 173^\circ$$

