

درسنامه و نکات کلیدی

فصل نهم

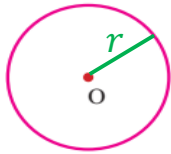
پایه هشتم

مسعود زیر کاری

(دایره)

ناحیه یک زاهدان

دایره: به مجموعه نقاطی که از یک نقطه مشخص (مرکز دایره)، به یک اندازه باشند.



نکته: دایره را اختصار به صورت $C(O, r)$ نشان می دهند.
 شعاع
 دایره
 مرکز

اجزای دایره:

(۱) **شعاع دایره:** فاصله ی مرکز دایره تا محیط دایره را شعاع و با حرف $(r$ یا R) نشان می دهند.

(۲) **کمان دایره:** فاصله ی ایجاد شده روی محیط دایره را کمان و با دو حرف و سه حرف نشان می دهند.

(۳) **وتر دایره:** پاره خطی که دو نقطه ی روی محیط دایره را به هم وصل کند وتر و با دو حرف نشان می دهند.

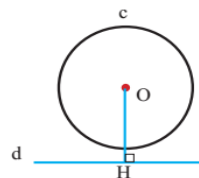
(۴) **قطر دایره:** پاره خطی است که دو نقطه ی روی محیط دایره را به هم وصل می کند و از مرکز دایره می گذرد. قطر را با دو حرف نشان می دهند.

@riaziat789

نکته: بزرگترین وتر دایره، قطر نام دارد. و قطر ۲ برابر شعاع است.

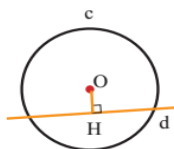
وضعیت خط و دایره: خط و دایره دارای سه وضعیت هستند:

(۱) خط ممکن است بیرون از دایره باشد. در این حالت خط و دایره نقطه مشترک (برخورد) ندارند.



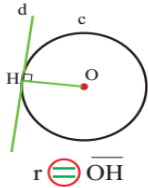
(۱) $r < \overline{OH}$ (رابطه ی مقایسه شعاع با فاصله مرکز تا خط)

(۲) خط ممکن است داخل دایره باشد. در این حالت خط و دایره دو مشترک (برخورد) دارند.



(۲) $r > \overline{OH}$ (رابطه ی مقایسه شعاع با فاصله مرکز تا خط)

۳) خط مماس است (چسبیده) بر دایره باشد. در این حالت خط و دایره یک مشترک (برخورد) دارند.



(رابطه ی مقایسه شعاع با فاصله مرکز تا خط)

@riaziat789

نکته: شعاع دایره در نقطه ی تماس بر خط مماس عمود است.

مثال: الف) شعاع دایره ۳ سانتی متر و فاصله ی مرکز تا خط ۵ سانتی متر است. خط و دایره چند نقطه ی مشترک دارند.

چون فاصله ی مرکز تا خط از شعاع دایره بیشتر است پس خط بیرون دایره قرار دارد و نقطه مشترکی ندارند.

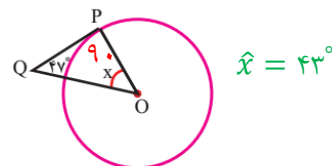
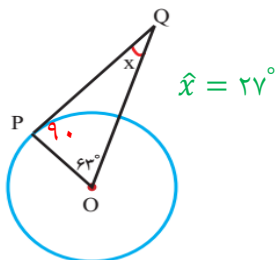
ب) قطر دایره ۶ سانتی متر و فاصله ی مرکز تا خط ۳ سانتی متر است. خط و دایره چند نقطه ی مشترک دارند.

قطر دو برابر شعاع دایره است پس شعاع دایره برابر با ۳ سانتی متر است. چون شعاع با فاصله ی مرکز تا خط برابر است پس خط و دایره یک نقطه ی مشترک دارند.

مثال: با توجه به هر شکل زاویه ی خواسته شده چند درجه است.

(شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود یعنی زاویه ی ۹۰ درجه تشکیل می دهد)

(مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است)

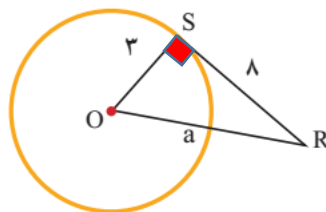


مثال: با توجه به هر شکل مقدار a را به دست آورید. (در مثلث قائم الزاویه برای اندازه ی ضلع مجهول از رابطه ی فیثاغورس استفاده می شود)

$$a^2 = 8^2 + 3^2$$

$$a^2 = 64 + 9 = 73$$

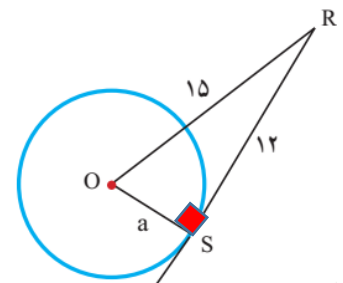
$$a = \sqrt{73}$$



$$a^2 = 15^2 - 12^2$$

$$a^2 = 225 - 144 = 81$$

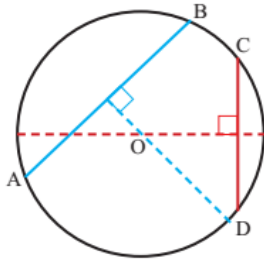
$$a = \sqrt{81} = 9$$



پیدا کردن مرکز دایره: ابتدا دو وتر غیر موازی رسم می کنیم. سپس عمودمنصف های آن دو وتر را رسم کرده که محل برخورد آن دو عمودمنصف مرکز دایره نام دارد.

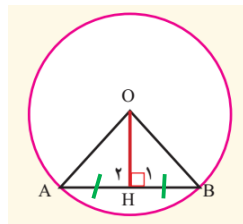
مثال : در یک دایره دلخواه مرکز دایره را با رسم دو وتر نشان دهید.

ابتدا دو وتر غیر موازی AB و CD را رسم می کنیم.



سپس عمود منصف آن دو را که با نقطه چین مشخص شده رسم می کنیم که محل برخورد دو عمود منصف همان مرکز دایره است.

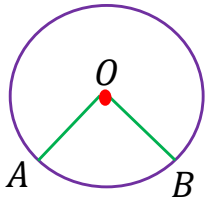
نکته : خطی که از مرکز بر وتر عمود باشد آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند. و بر عکس خطی که از وسط وتر و مرکز دایره بگذرد ، بر وتر عمود است.



$$AH = BH$$

@riaziat789

زاویه مرکزی : زاویه ای است که رأس آن مرکز دایره و دو ضلع آن شعاع دایره باشد.



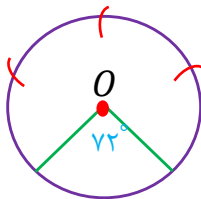
$$\hat{O} = \widehat{AB}$$

اندازه ی زاویه مرکزی : زاویه ی مرکزی برابر است با اندازه ی کمان روبه رو آن.

نکته : محیط دایره بر حسب درجه 360° است. و بر حسب سانتی متر $(2\pi r$ یا $3/14 \times \text{قطر})$ می باشد.

نکته : اگر دو کمان مساوی باشند وترهای نظیر آن دو کمان نیز برابرند و برعکس.

تقسیم دایره به کمان های مساوی : ابتدا یک شعاع دایره رسم می کنیم سپس محیط دایره (360° درجه) را بر تعداد کمان های خواسته شده تقسیم کرده ، نقاله را منطبق بر شعاع گذاشته و زاویه مورد نظر را مشخص می کنیم و در آخر دهانه ی پرگار را به اندازه ی وتر ایجاد شده باز کرده روی یکی از نقاط ایجاد شده روی محیط دایره گذاشته و متوالیاً کمان می زنیم.



مثال : یک دایره رسم کنید و آن را به ۵ کمان مساوی تقسیم کنید.

محاسبه طول یک کمان از دایره : برای محاسبه طول کمان از رابطه ی زیر استفاده می کنیم :

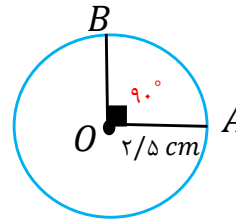
$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه ی کمان}}{360}$$

درسنامه و نکات کلیدی

مسعود زیر کاری

مثال: در هر شکل طول کمان AB چند سانتی متر است.

$$\text{محیط دایره} = \text{قطر} \times \frac{3}{14} = 5 \times \frac{3}{14} = 15/7$$



$$\frac{1}{4} \times \frac{90}{360} = \frac{x}{15/7}$$

$$x = 15/7 \div 4 \approx 4 \text{ cm}$$

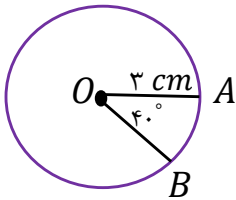
فصل نهم

(دایره)

پایه هشتم

ناحیه یک زاهدان

$$\text{محیط دایره} = \text{قطر} \times \frac{3}{14} = 6 \times \frac{3}{14} = 18/84$$



$$\frac{1}{4} \times \frac{40}{360} = \frac{x}{18/84}$$

$$x = 18/84 \div 9 \approx 2/10 \text{ cm}$$

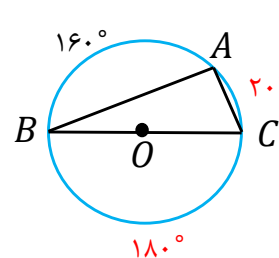
زاویه محاطی: زاویه ای است که رأس آن روی محیط دایره و دو ضلع آن وتر دایره باشد.

اندازه ی زاویه محاطی: زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه ی کمان روبه رو آن.

نکته: زاویه های محاطی روبه رو به یک کمان برابرند.

نکته: اندازه ی زاویه ی محاطی روبه رو به قطر دایره، ۹۰ درجه است.

مثال: اندازه ی کمان و زاویه های خواسته شده را بنویسید.



زاویه محاطی روبه رو قطر

$$\hat{A} = 90^\circ$$

$$\hat{B} = 10^\circ$$

$$\widehat{AC} = 20^\circ$$

$$\hat{C} = 80^\circ$$

زاویه محاطی نصف کمان روبه رو

$$\hat{A} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

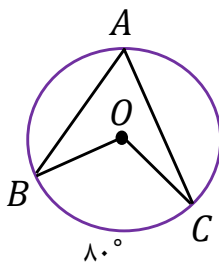
زاویه مرکزی برابر کمان روبه رو

$$\widehat{BOC} = 80^\circ$$

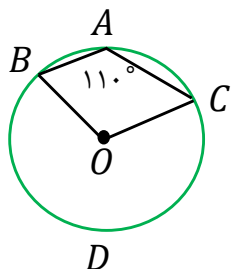
اندازه کمان

$$\widehat{BAC} = 360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$$

محیط دایره



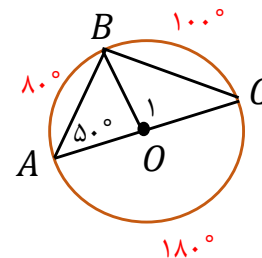
$$80^\circ$$



$$\widehat{BDC} = 220^\circ$$

$$\widehat{BAC} = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$$

$$\hat{O} = 140^\circ$$



$$\widehat{BC} = 100^\circ$$

$$\hat{C} = 40^\circ$$

$$\widehat{AB} = 80^\circ$$

$$\hat{O}_1 = 100^\circ$$

@riaziat789

ردیف	سؤالات	ردیف	سؤالات
۱	الف) وضعیت خط و دایره چند حالت است. با رسم شکل نشان دهید. ب) اگر قطر دایره ۸ سانتی متر و فاصله مرکز تا یک خط ۴ سانتی متر باشد. خط و دایره چند نقطه مشترک دارند.	۷	در شکل های زیر CD و AB مماس اند. مقدار x و y :
۲	با توجه به شکل زیر اندازه های خواسته شده را بنویسید. $\hat{A} = \dots$ $\widehat{BAC} = \dots$ $\hat{C} = \dots$ $\widehat{BOC} = \dots$ (AB قطر دایره)	۸	در شکل زیر AC قطر دایره است. اندازه هر زاویه مثلث را به دست آورید. $\hat{A} = \dots$ $\hat{C} = \dots$ $\hat{B} = \dots$
۳	با توجه به شکل زیر اندازه های خواسته شده را بنویسید. $\widehat{BAD} = \dots$ $\hat{C} = \dots$ $\widehat{BCD} = \dots$	۹	خط AB بر دایره مماس است. مقدار x را به دست آورید.
۴	الف) نشان دهید در یک دایره اگر کمان ها برابر باشند، وترهای نظیر کمان ها نیز برابرند. ب) نشان دهید در یک دایره اگر وترها برابر باشند، کمان های نظیر وترها نیز برابرند.	۱۰	اگر شعاع دایره ۳ سانتی متر باشد : الف) اندازه ی کمان AB ب) اندازه ی طول کمان AB ج) دایره به چند کمان مساوی تقسیم می شود.
۵	چگونه می توان با یک خط کش مرکز یک دایره را مشخص کرد. با رسم شکل نشان دهید.	۱۱	نشان دهید در هر دایره، خطی که از مرکز بر وتر عمود شود، وتر را نصف می کند.
۶	الف) $\frac{1}{5}$ محیط دایره، چند درجه است. ب) هر ۶ ضلعی منتظم دایره را به کمان های چند درجه تقسیم می کند. ج) اگر خط و دایره دو نقطه ی مشترک داشته باشند، خط کجا قرار دارد و رابطه ی مقایسه را بنویسید.	۱۲	در شکل زیر، همه ی رأس های یک لوزی به ضلع ۵ سانتی متر است. الف) چرا این لوزی مربع است. ب) قطر دایره چند است.

① الف) خط و دایره ۳ حالت دارند:

خط مماس بر دایره است
یک نقطه مشترک دارند
 $OH = R$

خط داخل دایره باشد
دو نقطه مشترک دارند
 $OH < R$

خط بیرون دایره باشد
نقطه مشترک ندارند
رابطه مقایسه:
 $OH > R$

یعنی یک نقطه مشترک دارند
خط بر دایره مماس است
شعاع دایره $R = ۲ = ۱ =$ قطر
 $OA = R \Rightarrow OA = ۴$ فاصله مرکز تا خط

②

مقابل $\hat{A} = \frac{100}{2} = 50^\circ$
مقابل $\hat{C} = 50^\circ$
مقابل $\hat{B} = 100^\circ$

مقابل $\widehat{BAC} = 180 + 180 = 360^\circ$
 $\widehat{BOC} = 100^\circ$
مرکز

قطر دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند: $360 \div 2 = 180^\circ$

③

مقابل $\widehat{BAD} = 360 - 100 = 260^\circ$
مقابل $\widehat{BCD} = 50 \times 2 = 100^\circ$
مقابل $\hat{C} = \frac{260}{2} = 130^\circ$

مقابل $\widehat{BAD} = 360 - 100 = 260^\circ$
مقابل $\widehat{BCD} = 50 \times 2 = 100^\circ$
مقابل $\hat{C} = \frac{260}{2} = 130^\circ$

مقابل $\widehat{BAD} = 360 - 100 = 260^\circ$

④ الف) $\widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

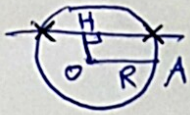
$\triangle AOB \cong \triangle COD$ (ض/ض)
 $\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$
اجزاء متساوی

$\triangle AOB \cong \triangle COD$ (ض/ض)
 $\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$
اجزاء متساوی

نکته: در دایره شعاع ها برابرند.

⑤ دو وتر غیر موازی در دایره رسم می کنیم. سپس عمود منصف دو وتر را رسم کرده، نقطه برخورد در محور منصف همان مرکز دایره است.

۶ الف) $340 \div 4 = 85^\circ$ $\frac{340}{4} \times \frac{1}{2} = 85^\circ$

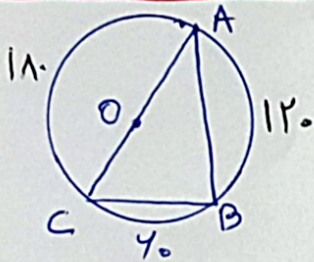


ج) خط داخل دایره قرار گرفته: $OH < R$

۷ نکته) شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است:

الف) $\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow$ رابطه فیثاغوری: $x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = 5$

ب) $\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow$ رابطه فیثاغوری: $y^2 = (\sqrt{25})^2 - 7^2 = 25 - 49 = 14 \Rightarrow y = \sqrt{14} = 4$



نکته) زاویه محاطی $\hat{A} = \frac{40}{2} = 20^\circ$

نکته) زاویه محاطی $\hat{C} = \frac{120}{2} = 60^\circ$

نکته) زاویه محاطی $\hat{B} = \frac{110}{2} = 55^\circ$

نکته) زاویه محاطی روبه رو قطر 90° راجع است.

۹ نکته) شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است:

الف) $\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (90^\circ + \frac{35}{2}) = 55^\circ$

ب) $\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (90^\circ + \frac{40}{2}) = 55^\circ$

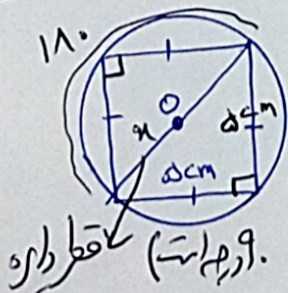
۱۰ الف) زاویه مرکز با اندازه ۳۶ درجه روبه رو آن برابر است: $\widehat{AB} = 36^\circ$

محیط دایره = $2\pi r$ $2 \times 3.14 \times 11.82 = 72.84$

ب) $\frac{\widehat{AB}}{36} = \frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} \Rightarrow \frac{36}{36} = \frac{x}{72.84} \Rightarrow x = 72.84$

ج) تعداد کمان‌ها در ۱۰ = $360 \div 36$

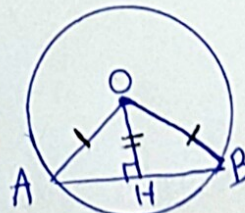
@riaziat789



۱۲ الف) چون لوزی در دایره زاویه قائمه باشد، مربع نام دارد. (زاویه محاطی روبه رو قطر 90° را می‌دهد)

ب) رابطه فیثاغوری: $x^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \Rightarrow x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

قطر دایره



$\triangle OAH \cong \triangle OHB$
(وض)

$\Rightarrow AH = HB$
اجزای متناظر

$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} \\ \overline{OH} = \overline{OH} \end{cases}$
در مشترک