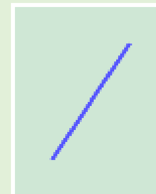

ریاضی هشتم
فصل ۳
نکات و توضیحات کتاب ریاضی
پایه هشتم
دوره اوّل متوسطه
گروه آموزشی ریاضی متوسطه اول استان خوزستان
فصل ۳:چند ضلعی
@riazicafe
مدرسه تعطیل است ولی آموزش تعطیل نیست.

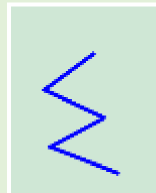
➢ **درس اول : چند ضلعی‌ها و تقارن**

همانطور که در سالهای قبل آموختیم خطها را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد.

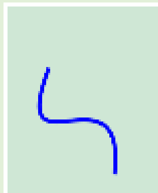
۱- خط راست



۲- خط شکسته

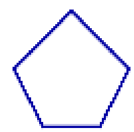


۳- خط خمیده

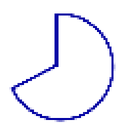


❋ **تعریف چندضلعی : به هر خط شکسته بسته، با این شرط که ضلع‌ها یکدیگر را قطع نکنند مگر در رأس‌ها که دو ضلع به هم می‌رسند چندضلعی می‌گویند.**

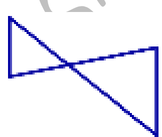
مثال :



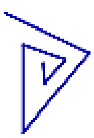
➢ **سوال ۱ :** **آیا شکل‌های زیر هر کدام یک چندضلعی هستند؟ چرا؟**



(ج)



(ب)



(الف)

پاسخ : خیر

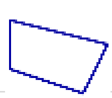
شکل «الف» چندضلعی نیست. زیرا خط شکسته بسته نیست.

شکل «ب» چندضلعی نیست. زیرا ضلعها در جایی غیر از رأسها یکدیگر را قطع می‌کنند.

شکل «ج» چندضلعی نیست. زیرا خط شکسته نیست.

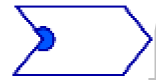
چندضلعی‌ها:

۱- چند ضلعی محدب (کوژ) : چندضلعی که تمام زاویه‌هایش، هرکدام کمتر از 180° باشد چندضلعی محدب یا کوژ نام دارد. مثال :



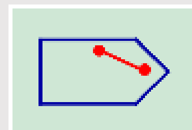
۲– چندضلعی مقعر (کاو): چندضلعی که حداقل یک زاویهٔ بزرگتر از 180° داشته باشد چندضلعی مقعر یا کاو نام دارد.

مثال :



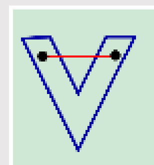
نکته ۱: در چندضلعی‌های محدب هر دو نقطهٔ دلخواه را بهم وصل کنیم تمام خط ایجاد شده در درون شکل قرار می‌گیرد.

مثال :



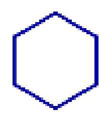
اما در چندضلعی‌های مقعر حداقل دو نقطه وجود دارد که اگر بهم وصل کنیم تمام خط و یا قسمتی از آن در درون شکل قرار نمی‌گیرد.

مثال :

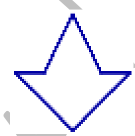


سوال ۲ : یک شش‌ضلعی محدب و یک شش‌ضلعی مقعر رسم کنید.

پاسخ:



شش‌ضلعی محدب

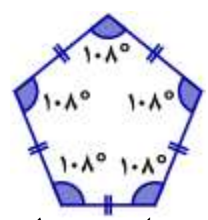


شش‌ضلعی مقعر

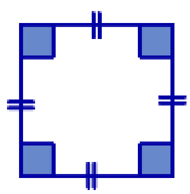
۳– چندضلعی‌های منتظم:

اگر در یک چندضلعی همهٔ زاویه‌ها با هم و همهٔ ضلعها نیز با هم مساوی باشند چندضلعی منتظم است.

مثال :

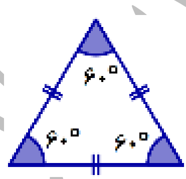


پنج‌ضلعی منتظم



چهارضلعی منتظم

(مربع)



سه‌ضلعی منتظم

(مثلث متساوی‌الاضلاع)

سوال ۳ : کدام گزینه یک شکل منتظم است؟

الف) لوزی ☐ ب) مثلث متساوی‌الساقین ☐ ج) مستطیل ☐ د) مثلث متساوی‌الاضلاع ☐

پاسخ: **گزینهٔ «د»**

نکته ۲ : در چندضلعی‌های منتظم هر چه تعداد ضلعها بیشتر شود اندازهٔ زاویه‌ها بزرگتر می‌شود.

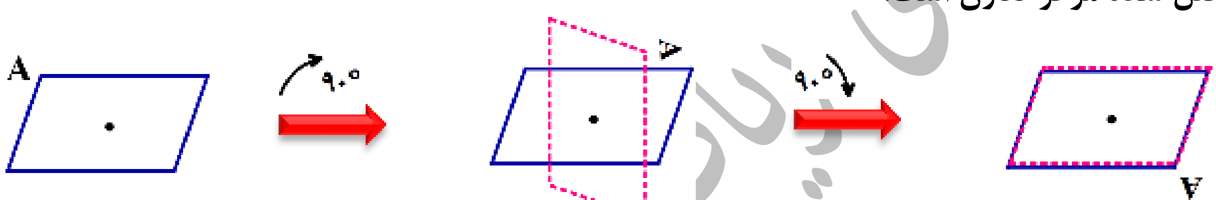
نکته ۳: در چندضلعی‌های منتظم هر چه تعداد ضلعها بیشتر شود شکل بیشتر به دایره شبیه می‌شود.

تقارن :

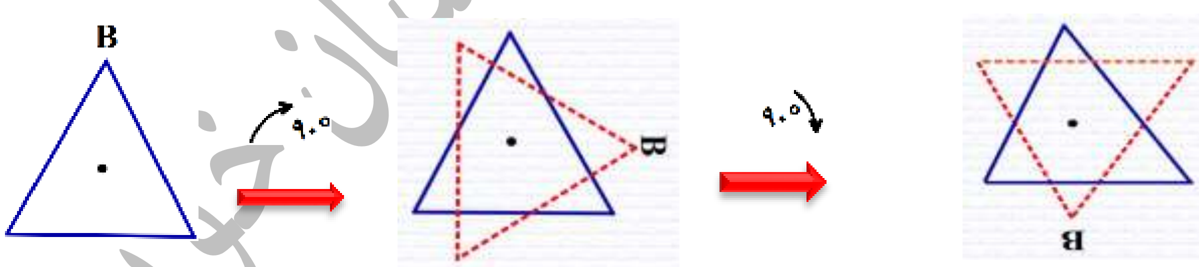
مرکز تقارن: اگر شکلی را حول نقطه‌ای که درون خود شکل قرار دارد، 180° دوران دهید و نتیجهٔ دوران روی خودش منطبق شود، آن نقطه مرکز تقارن شکل است.

مثال : ملاحظه می‌کنید شکل بعد از دوران 180° حول نقطه مشخص شده دوباره بر خودش منطبق شده است.

پس نقطهٔ مشخص شده مرکز تقارن است.



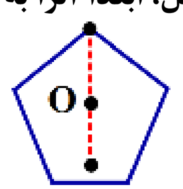
مثال : اما در شکل زیر ملاحظه می‌کنید شکل بعد از دوران 180° حول نقطهٔ مشخص شده دوباره بر خودش منطبق نمی‌شود. پس نقطهٔ مشخص شده مرکز تقارن نیست.



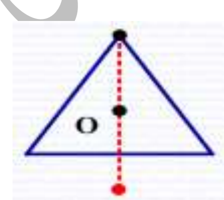
روشی دیگر برای تعیین مرکز تقارن: نقاطی را روی شکل تعیین کنید و قرینهٔ آن نقاط را نسبت به مرکز مشخص شده بیابید. اگر نقطه ایی وجود داشت که قرینه اش روی شکل قرار نگرفت، نتیجه بگیرید مرکز تقارن نیست.

(یادآوری: برای بدست آوردن قرینهٔ هر نقطه از شکل، ابتدا آنرا به نقطهٔ مشخص شده درون شکل وصل می‌کنید و به اندازهٔ خودش و در همان راستا امتداد می‌دهید)

مثال :

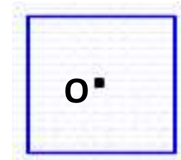


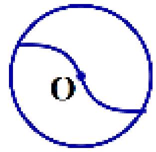
نقطهٔ O مرکز تقارن نیست



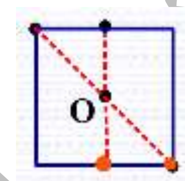
نقطهٔ O مرکز تقارن نیست

➢ **سوال ۴ :** با استفاده از همین روش تعیین کنید در کدامیک از شکلهای زیر نقطهٔ O مرکز تقارن است.

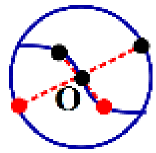




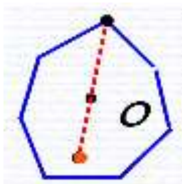
پاسخ:



نقطهٔ O مرکز تقارن است



نقطهٔ O مرکز تقارن است



نقطهٔ O مرکز تقارن نیست

نکته ۴ : به طور کلی در چندضلعی‌های منتظم که تعداد ضلعها زوج باشد مرکز تقارن وجود دارد.

مثال: مربع و ده‌ضلعی منتظم

نکته ۵ : به طور کلی در چندضلعی‌های منتظم که تعداد ضلعها فرد باشد مرکز تقارن وجود ندارد.

مثال: پنج‌ضلعی منتظم و هفت‌ضلعی منتظم

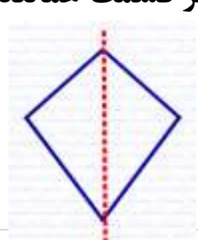
➢ **سوال ۵ :** کدامیک از شکلهای زیر مرکز تقارن دارد؟

الف) نیم‌دایره ☐ ب) مثلث متساوی‌الاضلاع ☐ ج) نه‌ضلعی منتظم ☐ د) متوازی‌الاضلاع ☐

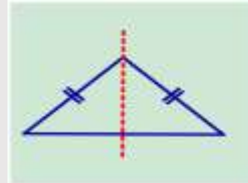
پاسخ: گزینه «د»

محور تقارن: خطی که شکل را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند به طوری که اگر شکل را از روی آن خط تا بزنیم دو قسمت بر هم منطبق می‌شوند، و هر قسمت همانند آینه‌ای است برای قسمت دیگر.

📖 مثال :



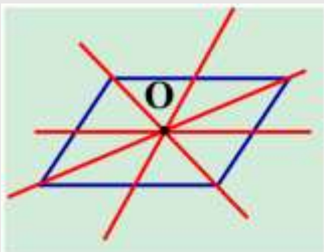
نکته ۶ : ممکن است شکلی مرکز تقارن نداشته باشد ولی محور تقارن داشته باشد.



مثال : مثلث متساوی‌الساقین

نکته ۷: ممکن است شکلی مرکز تقارن داشته باشد ولی محور تقارن نداشته باشد.

مثال : متوازی‌الاضلاع



همانطور که در شکل می‌بینید نقطهٔ O مرکز تقارن متوازی‌الاضلاع است.

اما هیچکدام از خطوط رسم شده محور تقارن نیستند. زیرا در صورت تا زدن متوازی‌الاضلاع روی آن خطوط دو قسمت بر هم منطبق نمی‌شوند.

نکته ۸ : چندضلعی‌های منتظم به تعداد ضلعهایشان محور تقارن دارند.

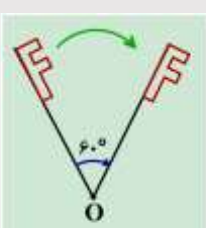
مثال: هفت‌ضلعی منتظم هفت محور تقارن دارد. (مرکز تقارن ندارد) و ده‌ضلعی منتظم ده محور تقارن دارد. (مرکز تقارن دارد)

➢ **سؤال ۶ :** نسبت تعداد محور تقارن یک هشت‌ضلعی منتظم به یک شش‌ضلعی منتظم برابر است با ....

پاسخ : $\dfrac{\text{تعداد محورتقارن هشت ضلعی}}{\text{تعداد محور تقارن شش ضلعی}} = \dfrac{۸}{۳} = \dfrac{۴}{۳}$

دوران: اگر شکلی را روی صفحه حول یک نقطهٔ ثابت (مرکز دوران) با زاویه‌ای مشخص بچرخانیم تصویر حاصل دوران یافتهٔ شکل می‌باشد.

نکته ۹ : در دوران ۱۸۰° و ۳۶۰° نیاز به مشخص کردن جهت دوران نیست ولی اگر زاویهٔ دوران ۱۸۰° و ۳۶۰° نباشد باید جهت دورا ن مشخص شود.



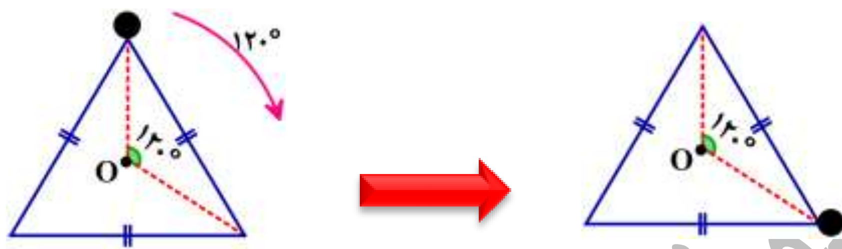
نکته ۱۰ : در هر دوران تصویر بدست آمده (دوران یافته) هم‌اندازه و هم‌جهت با شکل است.

دوران ۶۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت

تقارن چرخشی (دورانی) در چندضلعی‌های منتظم:

چندضلعی‌های منتظم را می‌توان با دورانی حداقل کمتر از 180° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مرکز دوران بر خودشان منطبق کرد.

مثال : اگر سه‌ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع) را حول مرکز O با زاویهٔ دوران 120° دوران دهیم بر خودش منطبق می‌شود.



نکته ۱۱ : حداقل زاویهٔ دوران در تقارن چرخشیِ چندضلعی‌های منتظم را می‌توان از دستور زیر بدست آورد.

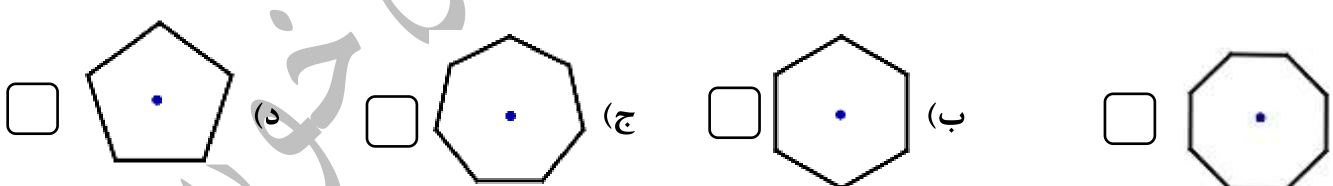
$$\hat{\alpha} = ۳۶۰^\circ \div \text{تعداد ضلع} \qquad (۰ < \hat{\alpha} \leq ۳۶۰)$$

سایر دورانها مضربهای $\hat{\alpha}$ هستند.

مثال : سه‌ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع) با چه دورانهایی حول نقطهٔ O بر خودش منطبق می‌شود؟

$۳۶۰^\circ \div ۳ = ۱۲۰^\circ \qquad \hat{\alpha} = ۱۲۰^\circ$ و ۲۴۰° و ۳۶۰°

سؤال ۷ : در کدامیک از گزینه‌های زیر چندضلعی منتظم با دوران ۹۰° حول نقطهٔ مشخص شده در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بر خودش منطبق می‌شود؟

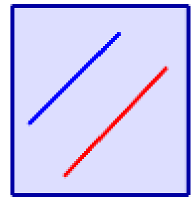


پاسخ: گزینه «الف» ۴۵×۲=۹۰ و ۳۶۰÷۸=۴۵ .

هشت‌ضلعی منتظم با دورانهای ۳۶۰° و ۳۱۵° و ۲۷۰° و ۲۲۵° و ۱۸۰° و ۱۳۵° و ۹۰° و ۴۵° حول نقطهٔ مشخص شده بر خودش منطبق می‌شود.

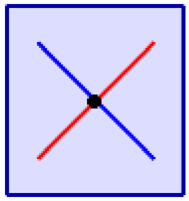
➢ درس دوم : توازی و تعامد

دو خط متمایز در صفحه نسبت به هم دو حالت دارند.



دو خط موازیند

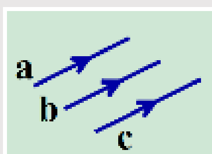
دو خط هیچ نقطه مشترکی ندارند



دو خط متقاطع‌اند

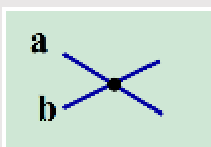
دو خط یک نقطهٔ مشترک دارند

نکته ۱۲ : برای اینکه خطوط موازی را نشان دهیم روی آنها علامتهای یکسان (>) یا (>>) یا (>>>) یا ... قرار می‌دهیم و بین اسامی آنها از علامت (||) استفاده می‌کنیم.



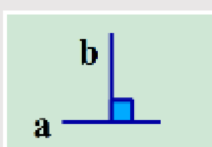
$a \parallel b \parallel c$

نکته ۱۳ : اگر خطوط داده شده موازی نباشند و متقاطع باشند بین اسامی آنها از علامت ($\nparallel$) استفاده می‌کنیم



$a \nparallel b$

نکته ۱۴ : اگر خطوط متقاطع بر هم عمود باشند بین اسامی آنها از علامت ($\perp$) استفاده می‌کنیم.



$a \perp b$

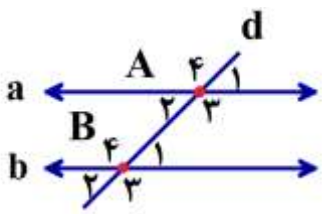
✸ دو خط موازی :

در دورهٔ ابتدایی آموختید که دو خط موازی هیچگاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند ممکن است این پرسش در ذهن شما بوجود بیاید که :برای تشخیص موازی بودن دو خط باید تا کجا آن دو را ادامه دهیم که مطمئن شویم موازی هستند؟

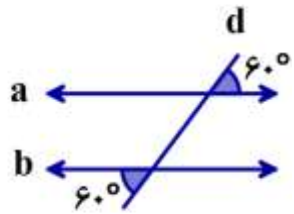
و اما در ادامه روشی را معرفی می‌کنیم که برای تشخیص موازی بودن دو خط مفید است.

تعریف دیگری برای دو خط موازی : هرگاه خطی مانند(d) دو خط aوb را قطع کند و زاویه‌های مساوی ایجادکند نتیجه می‌گیریم دو خط aوb موازی هستند.

$$\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{A}_2=\hat{B}_1=\hat{B}_2 & \text{(زاویه‌های تند مساویند)}\\ \hat{A}_3=\hat{A}_4=\hat{B}_3=\hat{B}_4 & \text{(زاویه‌های باز مساویند)}\end{cases} \Rightarrow a \parallel b$$

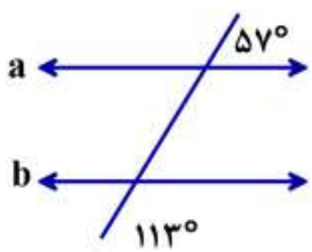


مثال : در شکل مقابل خط d دو خط a و b را طوری قطع کرده که زاویه‌های مساوی ایجاد کرده است پس دو خط a و b موازیند :

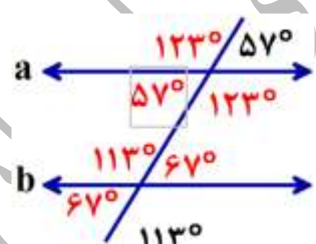


$$\begin{cases}\text{زاویه های تند}=60^\circ\\ \text{زاویه های باز}=120^\circ\end{cases} \Rightarrow a \parallel b$$

سوال ۱ : با توجه به شکل مقابل آیا دو خط a و b موازیند؟

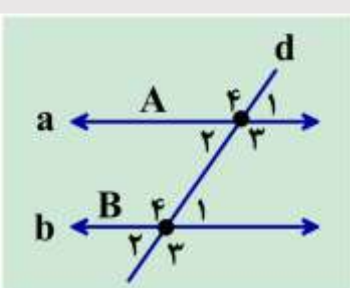


پاسخ: خیر – زیرا زاویه‌های تند با هم مساوی نیستند و زاویه‌های باز نیز با هم مساوی نیستند.



$$\Rightarrow a \nparallel b$$

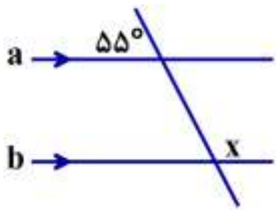
نکته ۱۵ : اگر خط مورّبی دو خط موازی را قطع کند با آنها زاویه‌های مساوی می‌سازد.



$$(a \parallel b \text{ و مورّب } d) \Rightarrow \begin{cases}\hat{A}_1=\hat{A}_2=\hat{B}_1=\hat{B}_2 & \text{(زاویه‌های تند مساویند)}\\ \hat{A}_3=\hat{A}_4=\hat{B}_3=\hat{B}_4 & \text{(زاویه‌های باز مساویند)}\end{cases}$$

و هر زاویهٔ باز با هر زاویهٔ تند مکمل است. $\hat{A}_1+\hat{B}_3=180^\circ$

سؤال ۲ : دو خط a و b در شکل مقابل موازیند. اندازهٔ زاویهٔ خواسته شده را بدست آورید.

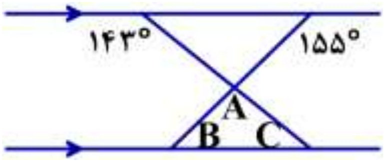


$\hat{x}=...$

پاسخ: زاویهٔ $\hat{x}$ زاویه‌ای باز است و مکمل ۵۵° پس: $\hat{x}=۱۸۰^\circ-۵۵^\circ=۱۲۵^\circ$

$\hat{x}=۱۲۵^\circ$

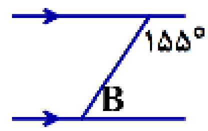
سؤال ۳ : با توجه به دو خط موازی اندازهٔ زاویه‌های خواسته شده را بدست آورید.



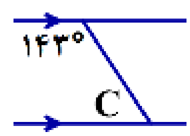
$\hat{A}=\cdots$ و $\hat{B}=\cdots$ و $\hat{C}=\cdots$

پاسخ : $\hat{A}=۱۱۸^\circ$ و $\hat{B}=۲۵^\circ$ و $\hat{C}=۳۷^\circ$

اگر شکل را به دو قسمت زیر تقسیم کنیم :



در این قسمت $\hat{B}$ مکمل زاویهٔ ۱۵۵° است : $\hat{B}=۱۸۰^\circ-۱۵۵^\circ=۲۵^\circ$

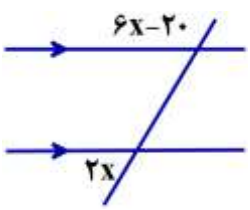


در این قسمت نیز $\hat{C}$ مکمل زاویهٔ ۱۴۳° است. $\hat{C}=۱۸۰^\circ-۱۴۳^\circ=۳۷^\circ$

برای بدست آوردن $\hat{A}$ با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است، داریم :

$$\hat{A}=۱۸۰^\circ-(۳۷^\circ+۲۵^\circ)=۱۸۰^\circ-۶۲^\circ=۱۱۸^\circ$$

سؤال ۴ : شکل مقابل با توجه به موازی بودن دو خط مقدار x را تعیین کنید.



پاسخ : $x=۲۵$

$۲x$ اندازهٔ زاویهٔ تند و $۶x-۲۰$ اندازهٔ باز است دو زاویه مکمل یکدیگر هستند یعنی :

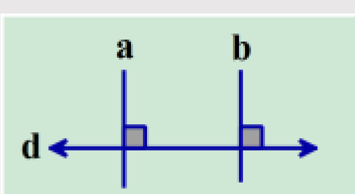
$$۶x-۲۰+۲x=۱۸۰^\circ$$

سپس با کمک معادله مقدار x را تعیین می‌کنیم.

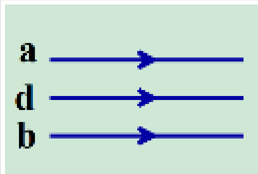
$$۸x-۲۰=۱۸۰^\circ \rightarrow ۸x=۱۸۰+۲۰=۲۰۰ \rightarrow x=\frac{۲۰۰}{۸}=۲۵ \rightarrow \quad x=۲۵$$

نکته ۱۶ (نکاتی در مورد خطوط موازی) :

❶ دو خط عمود بر یک خط، با هم موازیند. $\begin{cases} a \perp d \\ b \perp d \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$

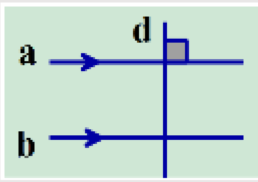


❷ دو خط موازی با یک خط، با هم موازیند.



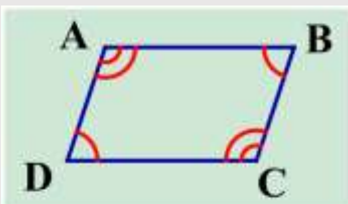
$$\begin{cases} a \parallel d \\ b \parallel d \end{cases} \Rightarrow \ a \parallel b$$

❸ اگر خطّی بر یکی از دو خطّ موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود خواهد بود.



$$\begin{cases} d \perp a \\ a \parallel b \end{cases} \Rightarrow \ d \perp b$$

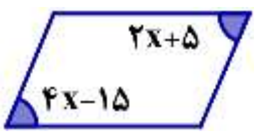
❹ در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو با هم موازیند با کمک روابط موجود بین خطوط موازی و مورّب که در این درس آمــوختید، می‌توان نتیجه گــرفت در هر متــوازی الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو با هم برابرند و زاویه‌هــای مجــاور مکمل‌اند.



$$\hat{A} = \hat{C} \qquad \hat{A} + \hat{B} = ۱۸۰^\circ \qquad \hat{C} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$$

$$\hat{D} = \hat{B} \qquad \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \qquad \hat{D} + \hat{A} = ۱۸۰^\circ$$

➢ **سوال ۵ :** با توجه به اینکه شکل مقابل متوازی‌الاضلاع ست، مقدار x را تعیین کنید.



پاسخ : $x = ۱۰$

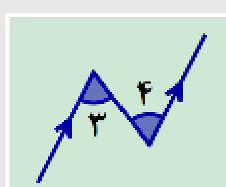
در متوازی الاضلاع دو زاویه روبه‌رو با هم مساوی هستند. $۲x + ۵ = ۴x - ۱۵$

به کمک حل معادله، مقدار x را تعیین می‌کنیم :

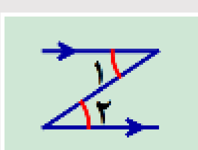
$$۲x - ۴x = -۱۵ - ۵ \longrightarrow -۲x = -۲۰ \longrightarrow x = \frac{-۲۰}{-۲} = ۱۰ \quad \longrightarrow \quad x = ۱۰$$

نکته ۱۷ : هر جا خطوط موازی را به صورت حرف « Z » و یا حرف «N » دیدیم و یا برعکس آنها، زاویه‌های تند آنها با هم مساویند.

مثــال :

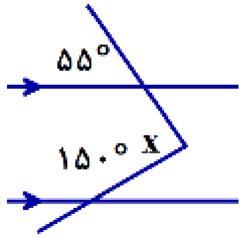


$\hat{۳} = \hat{۴}$



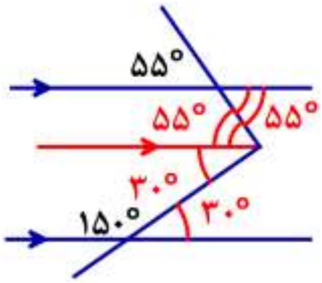
$\hat{۱} = \hat{۲}$

➢ سؤال ۶ : اندازهٔ زاویه x چند درجه است؟



۱) ۵۵° ☐ ۲) ۳۰° ☐ ۳) ۹۵° ☐ ۴) ۸۵° ☐

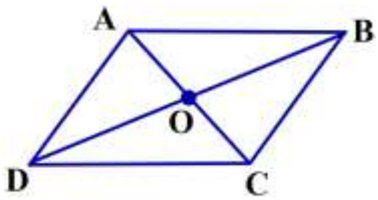
پاسخ : می توان با رسم خطی موازی دو خط شکل را به صورت مقابل تقسیم میکنیم ،



جواب:گزینه ۴

$$\hat{x} = ۵۵^{\circ} + ۳۰^{\circ} = ۸۵^{\circ}$$

➢ درس سوم : چهارضلعی



متوازی‌الاضلاع:

متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که اضلاع روبه‌رو دو به دو موازی باشند.

با استفاده از کاغذ پوستی و دوران ۱۸۰° حول مرکز تقارنش (نقطهٔO) مشاهده می‌کنید که اضلاع روبه‌رو، روی هم قرار می‌گیرند (پس با هم برابرند) و زاویه‌های روبه‌رو نیز روی هم قرار می‌گیرند (پس با هم برابرند). با استفاده از دوران و انطباق می‌توان ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع را به صورت زیر نوشت:

۱- در هر متوازی‌الاضلاع، اضلاع روبه‌رو با هم مساویند. $AD = BC$ و $AB = DC$

۲- در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های روبه‌رو با هم مساویند. $\hat{B} = \hat{D}$ و $\hat{A} = \hat{C}$

۳- در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مجاور به یک ضلع مکملند.

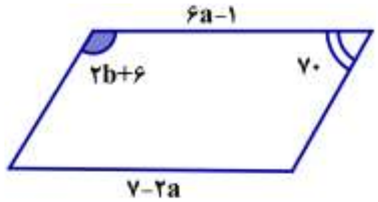
$$\hat{D} + \hat{A} = ۱۸۰^{\circ} \quad و \quad \hat{C} + \hat{D} = ۱۸۰^{\circ} \quad و \quad \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^{\circ} \quad و \quad \hat{A} + \hat{B} = ۱۸۰^{\circ}$$

۴- در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. $OB = OD$ و $AO = OC$

۵- در هر متوازی‌الاضلاع، محل برخورد قطرها، مرکز تقارن متوازی‌الاضلاع است (نقطهٔO)

(یادآوری: متوازی‌الاضلاع، محور تقارن ندارد)

➢ سؤال ۱ : با توجه به متوازی‌الاضلاع مقابل مقادیر خواسته شده را بدست آورید.



$a = \cdots$

$b = \cdots$

پاسخ: $b = ۵۲$ و $a = ۱$

می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو با هم برابرند. پس $۶a - ۱ = ۷ - ۲a$ به کمک حل معادله مقدار a را تعیین می‌کنیم:

$$۶a + ۲a = ۷ + ۱ \rightarrow ۸a = ۸ \rightarrow a = \frac{۸}{۸} = ۱ \rightarrow a = ۱$$

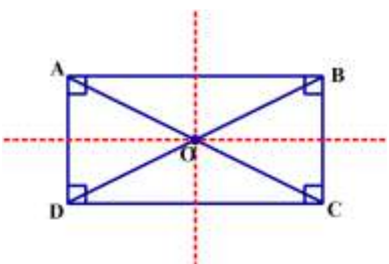
می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مجاور به یک ضلع مکملند. پس: $۲b + ۶ + ۷۰ = ۱۸۰$ به کمک حل معادله مقدار b را تعیین می‌کنیم:

$$۲b = ۱۸۰ - ۷۶ = ۱۰۴ \rightarrow ۲b = ۱۰۴ \rightarrow b = \frac{۱۰۴}{۲} = ۵۲ \rightarrow b = ۵۲$$

➢ مستطیل:

اگر در متوازی‌الاضلاع، زاویه‌ها قائمه(°۹۰) باشند، مستطیل بوجود می‌آید. بنابراین مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که زاویه‌های قائمه دارد.

اگر مستطیلی را روی یکی از خط‌های تقارنش و سپس روی خط تقارن دیگرش تا کنید می‌توان ویژگی‌های مستطیل را به صورت زیر نوشت:

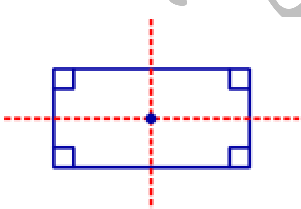


۱- در هر مستطیل، همهٔ زاویه‌ها با هم برابرند. $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = ۹۰^\circ$

۲- در هر مستطیل، ضلع‌های روبه‌رو با هم برابرند. $AD = BC$ و $AB = DC$

۳- در هر مستطیل، قطرها با هم برابرند. $AC = BD$

۴- در هر مستطیل، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. $OA = OC = OB = OD$



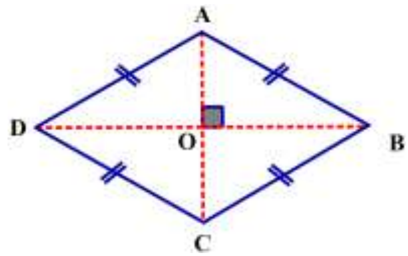
(یادآوری: هر مستطیل دو محور تقارن دارد:

۱- خطی که از وسط طول‌ها می‌گذرد. ۲- خطی که از وسط عرض‌ها می‌گذرد)

❈ تذکر: قطرها در مستطیل محور تقارن نیستند.

❈ تذکر: در مستطیل قطرها بر هم عمود نیستند.

➢ لوزی :



اگر در متوازی‌الاضلاع، همهٔ ضلع‌ها برابر باشند. لوزی به وجود می‌آید.

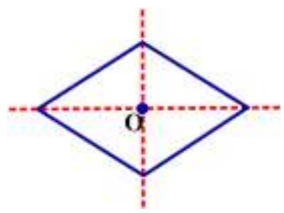
بنابراین لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که ضلع‌های برابر دارد.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

با توجه به اینکه لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است، علاوه بر همهٔ ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع، ویژگی دیگری نیز دارد.

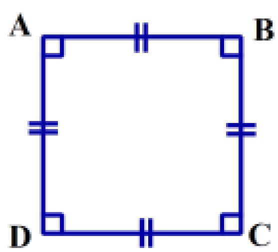
«در هر لوزی قطرها بر هم عمودند $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ »

(یادآوری: در هر لوزی قطرها محور تقارن هستند و محل برخورد قطرها، مرکز تقارن (نقطهٔO) لوزی است.



➢ مربع:

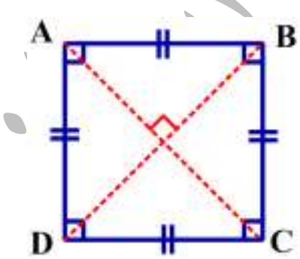
اگر در متوازی‌الاضلاع، همه ضلعها هم‌اندازه و هم‌زاویه‌ها قائمه باشند، مربع به وجود می‌آید. بنابراین مربع، متوازی‌الاضلاعی است که هم ضلع‌های مساوی و هم زاویه‌های قائمه دارد.



$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = ۹۰°$$

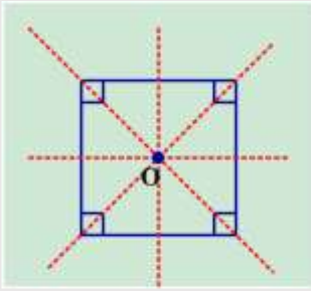
در مربع تمام ویژگی‌های یک متوازی‌الاضلاع وجود دارد علاوه بر همهٔ ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع، ویژگی‌های زیر را هم دارد:



۱- در هر مربع قطرها با هم برابرند. $AC = BD$

۲- در هر مربع قطرها بر هم عمودند. $AC \perp BD$

نکته ۱ : هر مربع چهار محور تقارن دارد:



۱- دو قطر

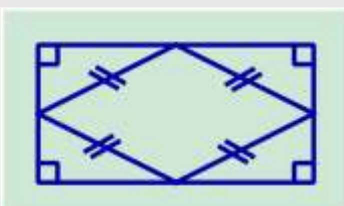
۲- خطوطی که از وسط هر دو ضلع روبه‌رو می‌گذرند.

محل برخورد خط‌های تقارن، مرکز تقارن (نقطهٔ O) مربع است.

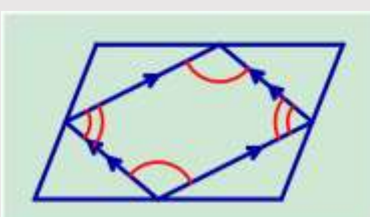
نکته۲: هر مربع هم نوعی متوازی‌الاضلاع، هم نوعی لوزی و هم نوعی مستطیل است. زیرا ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع، لوزی و مستطیل را دارد.

نکته۳: اگر وسط‌های اضلاع یک مربع را متوالیاً به هم وصل کنیم شکل بوجود آمده باز هم مربع خواهد بود. (با استفاده از خط‌های تقارن در مربع و تا زدن مربع روی این خطوط می‌توان به درستی این مطلب پی برد)

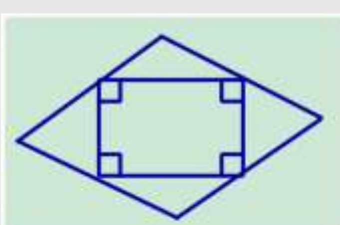
نکته۴: اگر وسط‌های اضلاع یک مستطیل را متوالیاً به هم وصل کنیم شکل بوجود آمده یک لوزی خواهد بود. (با استفاده از خط‌های تقارن در مستطیل و تا زدن مستطیل روی این خطوط می‌توان به درستی این مطلب پی برد)



نکته۵: اگر وسط‌های اضلاع یک متوازی‌الاضلاع را متوالیاً به هم وصل کنیم شکل بوجود آمده، یک متوازی‌الاضلاع خواهد بود.

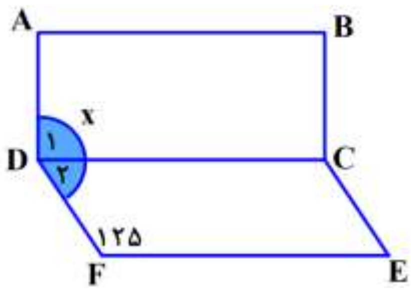


نکته۶: اگر وسط‌های اضلاع یک لوزی را متوالیاً به هم وصل کنیم شکل بوجود آمده، یک مستطیل خواهد بود.



➢ **سؤال ۲ :** در شکل مقابل، ABCD مستطیل و DCEF متوازی‌الاضلاع است. مقدار زاویهٔ $\widehat{x}$ چند درجه است؟

الف) ۱۵۵° ☐ ب) ۱۴۵° ☐



پاسخ: (ب) ۱۴۵°

$$\widehat{x} = \widehat{D}_۱ + \widehat{D}_۲ = ۹۰^\circ + ۵۵^\circ = ۱۴۵^\circ$$

$$\widehat{D}_۱ = ۹۰^\circ \quad \text{و} \quad \widehat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ - ۱۲۵^\circ = ۵۵^\circ$$

➢ **سؤال ۳ :** جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) اگر وسطهای اضلاع یک مستطیل را به طور متوالی به هم وصل کنیم، شکل حاصل .... خواهد بود.

ب) در متوازی‌الاضلاع، محل برخورد قطرها، .... شکل است.

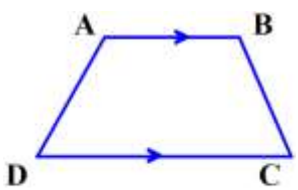
ج) لوزی که دو قطر مساوی دارد، .... نام دارد.

د) متوازی‌الاضلاعی که یک زاویهٔ قائمه دارد، .... نام دارد.

پاسخ:

الف) لوزی ب) مرکز تقارن ج) مربع د) مستطیل

➢ **ذوزنقه :**



چهارضلعی که فقط دو ضلع موازی دارد، ذوزنقه نام دارد. $(AB \parallel DC)$

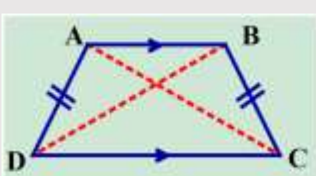
به دو ضلع موازی قاعده و به دو ضلع دیگر که با هم موازی نیستند ساق می‌گویند.

* تذکر: در ذوزنقه زاویه‌های روبه‌رو با هم مساوی نیستند و قطرها یکدیگر را نصف نمی‌کنند.

نکته ۷ : در هر ذوزنقه دو زاویهٔ مجاور به هر ساق مکملند. $\widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ$ و $\widehat{A} + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ$

نکته ۸ : اگر در ذوزنقه دو ساق مساوی باشند، ذوزنقه متساوی‌الساقین خواهد بود.

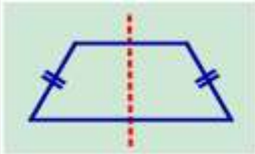
پس دو زاویهٔ مجاور به هر قاعده با هم برابرند



$$\widehat{D} = \widehat{C} \quad \text{و} \quad \widehat{A} = \widehat{B} \quad \text{و} \quad \overline{AD} = \overline{BC}$$

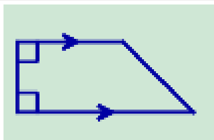
و دو قطر نیز با هم برابرند. $AC = BD$

نکته ۴ : ذوزنقه متساوی الساقین یک خط تقارن دارد



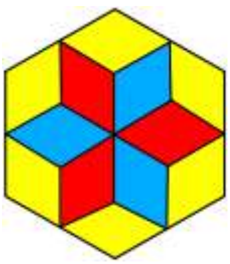
نکته ۵ : اگر در ذوزنقه یکی از ساقها بر دو قاعده عمود باشد ذوزنقه قائم‌الزاویه خواهد بود.

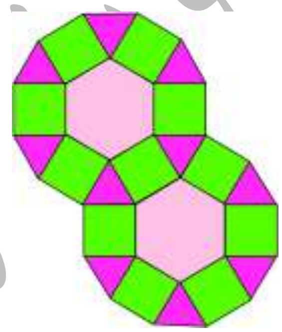
ساق قائم



➢ درس چهارم : زاویه‌های داخلی

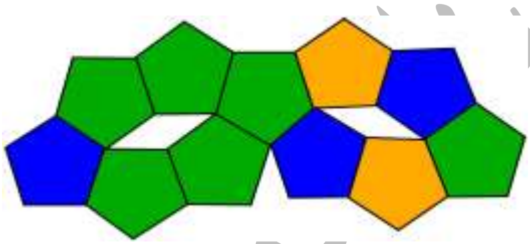
کاشی‌کاری: گاهی برای پوشاندن یک سطح از یک یا چند نوع کاشی استفاده می‌کنند به صورتی که کاشی‌ها روی هم قرار نگیرند و نیز بین آنها فضای خالی نباشد. مانند شکل‌های زیر:





کاشی‌کاری با استفاده از سه نوع کاشی   کاشی‌کاری با استفاده از یک نوع

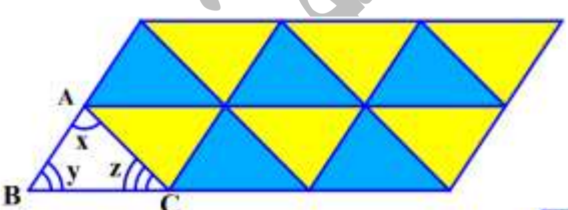
➢ سؤال ۱ : به شکل زیر توجه کنید. چرا کاشی‌کاری با یک نوع کاشی انجام نمی‌شود؟



پاسخ:

زیرا بین کاشی‌ها فضای خالی وجود دارد.

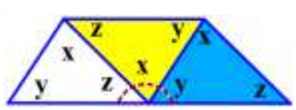
سطح زیر با مثلث‌هایی هم‌نهشت با مثلث ABC کاشی‌کاری شده است.



مثلث آبی انتقال یافته مثلث ABC است.

مثلث زرد دوران یافته مثلث ABC است.

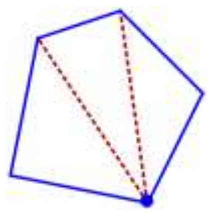
اگر سه مثلث هم‌نهشت را دوباره رسم کنیم،



ملاحظه می‌کنید که سه زاویهٔ «z ،y ،x» که زاویه‌های یک مثلث هستند در کنار هم تشکیل زاویهٔ نیم صفحه را می‌دهند پس : « مجموع زاویه‌های یک مثلث °۱۸۰ است» $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ$

مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی:

منظور از زاویه‌های داخلی یک چندضلعی، زاویه هایی است که درون چندضلعی قرار دارد و ضلع‌های زاویه، ضلعهای چندضلعی است. برای محاسبه مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی با رسم تعدادی از قطرهای چندضلعی درون آن تعدادی مثلث ایجاد می‌کنیم و با توجه به اینکه: «مجموع زاویه‌های هر مثلث °۱۸۰ است. مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی را به دست می آوریم.



۳×۱۸۰=۵۴۰

※ تذکر: دقت کنید قطرهایی رسم کنید که یکدیگر را قطع نکنند. (بجز در رأس)

برای رسم قطرها یک رأس را در نظر می‌گیریم و به رأسهای مقابل وصل می‌کنیم.

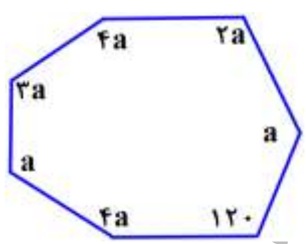
با دقت در مثال بالا متوجه می‌شوید که تعداد مثلثهای ایجاد شده در هر چندضلعی ۲ تا از تعداد ضلع‌ها کمتر است.

مثلاً مجموع زاویه‌های داخلی یک شش‌ضلعی برابر است با: $(۶-۲)\times ۱۸۰^\circ = ۴\times ۱۸۰^\circ = ۷۲۰^\circ$

نکته ۱ : برای محاسبه مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

مجموع زاویه‌های داخلی هر چندضلعی = تعداد مثلثها × ۱۸۰ = (تعداد ضلع‌ها −۲) × ۱۸۰

سؤال ۲ : در شکل مقابل مقدار a را بدست آورید.



پاسخ: $a = ۵۲$

مجموع زاویه‌های داخلی هفت ضلعی $= ۵\times ۱۸۰ = ۹۰۰$

$$۲a + a + ۱۲۰ + ۴a + a + ۳a + ۴a = ۹۰۰$$

به کمک حل معادله مقدار a را بدست می‌آوریم. $۱۵a + ۱۲۰ = ۹۰۰$

$$۱۵a = ۹۰۰-۱۲۰=۷۸۰ \rightarrow a = \frac{۷۸۰}{۱۵} = ۵۲ \rightarrow a = ۵۲$$

محاسبهٔ اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک چندضلعی منتظم:

ابتدا مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی منتظم را بدست می‌آوریم و چون در شکل‌های منتظم زاویه‌ها با هم برابرند، مجموع زاویه‌های داخلی را بر تعداد زاویه‌ها تقسیم می‌کنیم تا اندازهٔ هر زاویه بدست آید.

➢ **سؤال ۳ :** اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی هشت‌ضلعی منتظم را بدست آورید.

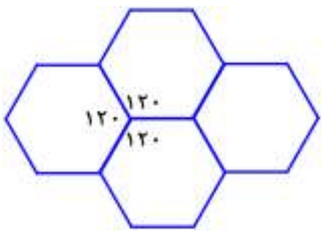
پاسخ : ۱۳۵ ، مجموع زاویه‌های داخلی $۱۰۸۰ = ۱۸۰ \times (۲ - ۸)$ ← اندازهٔ هر زاویه $۱۰۸۰ \div ۸ = ۱۳۵$

نکته ۲ : اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی n ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$

➢ **سؤال ۴ :** آیا با کاشی‌هایی به شکل شش‌ضلعی منتظم می‌توان به تنهایی کاشی‌کاری کرد؟ پاسخ: بله

در کاشی‌کاری با شش‌ضلعی منتظم به تنهایی، هیچ فضای خالی ایجاد نمی‌شود.

ابتدا اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی شش‌ضلعی منتظم را محاسبه می‌کنیم. شش‌ضلعی‌های منتظم وقتی کنار هم قرار می‌گیرند در هر گوشه



$$\frac{(۶-۲)\times ۱۸۰}{۶} = \frac{۴\times ۱۸۰}{۶} = ۱۲۰$$

سه تا زاویهٔ ۱۲۰° داریم که می‌شود $۳\times ۱۲۰^\circ = ۳۶۰^\circ$

نکته ۳ : اگر بخواهیم فقط با استفاده از یک نوع شکل منتظم کاشی‌کاری کنیم، اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی آن باید شمارندهٔ ۳۶۰ باشد. (به عبارتی ۳۶۰° باید بر اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی شکل منتظم بخش‌پذیر باشد)

➢ **سؤال ۵ :** آیا با کاشی‌هایی به شکل پنج‌ضلعی منتظم، می‌توان به تنهایی کاشی‌کاری کرد؟

پاسخ: خیر

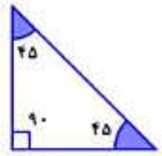
اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی $\frac{(۵-۲)\times ۱۸۰}{۵} = \frac{۳\times ۱۸۰}{۵} = ۱۰۸$ (۳۶۰ بر ۱۰۸ بخش‌پذیر نیست.)

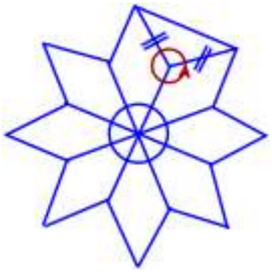
➢ سؤال ۶ : شکل روبه‌رو با یک نوع مثلث و یک نوع لوزی کاشی‌کاری شده است.

اندازهٔ زاویه‌های مثلث و لوزی را محاسبه کنید.

پاسخ: در لوزی:

و در مثلث





اگر به مرکز طرح کاشی‌کاری دقت کنید، ۸ تا زاویهٔ تند لوزی‌ها که با هم مساویند

در کنار هم تشکیل زاویهٔ ۳۶۰ درجه را می‌دهند.

اندازهٔ زاویهٔ تند در هر لوزی $۳۶۰ \div ۸ = ۴۵$

اندازهٔ زاویهٔ باز در هر لوزی ۱۳۵ = ۴۵ - ۱۸۰ می‌باشد. سپس به گوشه‌ای دقت کنید که از دو زاویهٔ باز لوزی و

یک زاویهٔ مثلث تشکیل شده است. $۲\times۱۳۵ = ۲۷۰$

اندازهٔ یکی از زاویه‌های مثلث $۳۶۰ - ۲۷۰ = ۹۰$

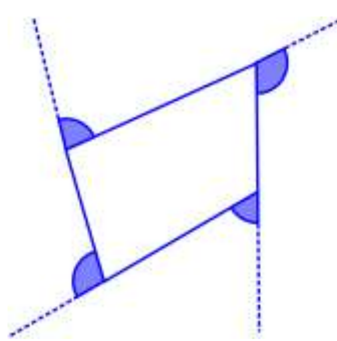
درمثلث قائم الزاویه ایی که دو ساق برابر دارد اندازهٔ هر زاویهٔ تند برابرست با: $۹۰ \div ۲ = ۴۵$ $۱۸۰ - ۹۰ = ۹۰$

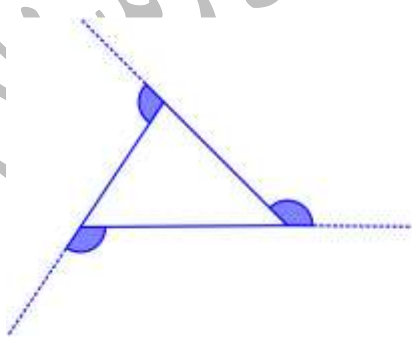
نکته ۴ : برای محاسبه مجموع زاویه های داخلی در n ضلعی‌های مقعر (کاو) نیز از رابطه $(n-۲) \times ۱۸۰^\circ$ استفاده می‌کنیم.

➢ درس پنجم : زاویه‌های خارجی

در چندضلعی‌های محدب، زاویه‌ای که در هر رأس بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می‌شود، زاویهٔ خارجی آن رأس نامیده می‌شود.

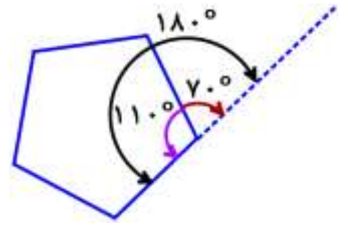
📖 مثال:



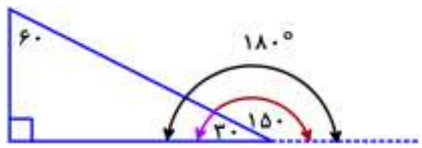


نکته۱: در چندضلعی‌های محدب مجموع هر زاویهٔ داخلی با زاویهٔ خارجی متناظرش برابر است با ۱۸۰°.

📖 مثال:



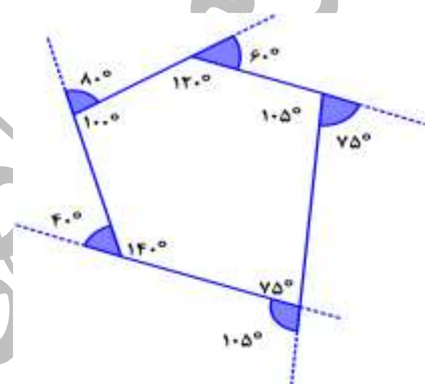
$۱۱۰^\circ+۷۰^\circ=۱۸۰^\circ$



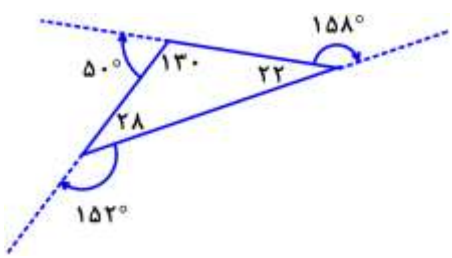
$۳۰^\circ+۱۵۰^\circ=۱۸۰^\circ$

نکته۲: در چندضلعی‌های محدب، مجموع زاویه‌های خارجی ۳۶۰° است.

📖 مثال:

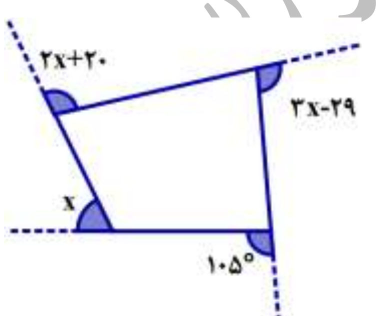


$۱۰۵^\circ+۴۰^\circ+۸۰^\circ+۶۰^\circ+۷۵^\circ=۳۶۰^\circ$



$۱۵۲^\circ+۱۵۸^\circ+۵۰^\circ=۳۶۰^\circ$

➤ سؤال ۱ : در شکل مقابل، اندازهٔ x چند درجه است؟



پاسخ: $x = ۴۴^\circ$

مجموع زاویه‌های خارجی در چندضلعی‌های محدب برابر است با ۳۶۰ درجه

$(۲x + ۲۰) + (۳x - ۲۹) + ۱۰۵ + x = ۳۶۰$

با حل معادله مقدار x را بدست می‌آوریم.

$۶x + ۹۶ = ۳۶۰ \rightarrow ۶x = ۳۶۰ - ۹۶ = ۲۶۴ \rightarrow x = \frac{۲۶۴}{۶} = ۴۴ \rightarrow \quad x = ۴۴$

نکته۳: در چندضلعی‌های منتظم زاویه‌های خارجی برابرند، بنابراین برای بدست آوردن اندازهٔ یک زاویهٔ خارجی می‌توان ۳۶۰° را بر تعداد زاویه‌های خارجی تقسیم کرد.

اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی در nضلعی‌های منتظم $= ۳۶۰ \div n$

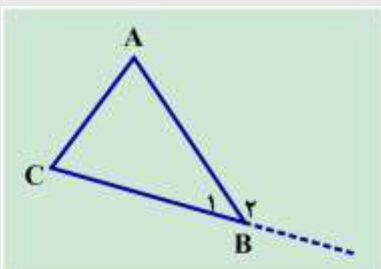
📖 مثال: اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی در ده‌ضلعی منتظم برابر است با: $۳۶ = ۱۰ \div ۳۶۰$

⮘ سؤال ۲ : اگر اندازهٔ یک زاویهٔ داخلی nضلعی منتظمی ۱۵۶ درجه باشد، تعداد اضلاع چندضلعی را بیابید.

پاسخ: ۱۵ضلعی منتظم ،می‌دانیم مجموع هر زاویهٔ خارجی با زاویهٔ داخلی متناظرش برابر است با ۱۸۰° .

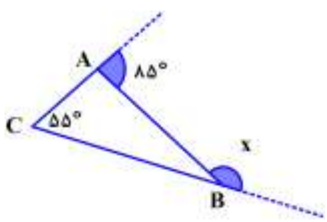
پس: اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی n ضلعی منتظم $۱۸۰ - ۱۵۶ = ۲۴^\circ$. با توجه به اینکه می‌دانیم مجموع زاویه‌های خارجی باید ۳۶۰° شود. بنابراین n ضلعی مورد نظر سؤال ۱۵ضلعی منتظم است $۳۶۰ \div ۲۴ = ۱۵$.

نکته ۴ : در هر مثلث، اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش (دو زاویهٔ داخلی که کنارش قرار ندارند) برابر است.



$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B}_۱ + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \\ \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ \end{cases} \rightarrow \hat{B}_۲ = \hat{A} + \hat{C}$$

⮘ سؤال ۳ : در شکل مقابل زاویهٔ x چند درجه است؟

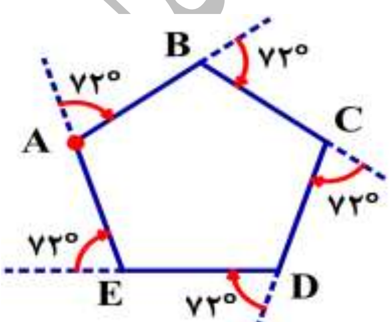


پاسخ: $\hat{x} = ۱۵۰^\circ$ ،ابتدا زاویهٔ داخلی A را بدست می‌آوریم: $۱۸۰ - ۸۵ = ۹۵^\circ$

حال با استفاده از نکتهٔ قبل زاویهٔ x را تعیین می‌کنیم $\hat{x} = ۹۵ + ۵۵ = ۱۵۰^\circ$

نکته ۵ : هرگاه روی محیط یک چندضلعی محدب حرکت کنیم به اندازهٔ زاویه‌های خارجی شکل می‌چرخیم، یعنی (۳۶۰°).

📖 مثال: لاک‌پشتی برای پیمودن محیط ۵ضلعی منتظم از نقطهٔA شروع می‌کند وقتی می‌خواهد از روی ضلع AB روی ضلع BC قرار بگیرد به اندازهٔ زاویهٔ خارجی $\hat{B}$ می‌چرخد و بعد به اندازهٔ زاویهٔ خارجی $\hat{C}$ و .... پس تا وقتی دوباره به نقطهٔ A برگردد روی هم ۳۶۰° می‌چرخد.



$۵ \times ۷۲ = ۳۶۰^\circ$

گروه آموزشی ریاضی متوسطه اول استان خوزستان