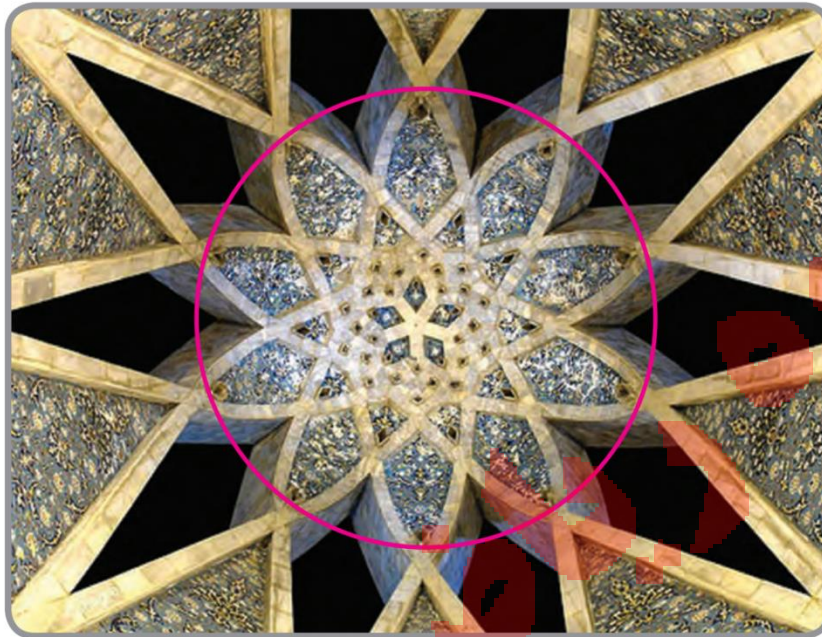


فصل ۹

دایره



هدف کلی

شناخت اجزای مختلف دایره ها و زاویه های مربوط به آن ها

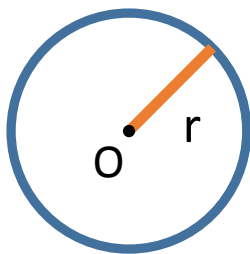
انتظارات از دانش آموزان در این درس:

۱. تعریف دایره و اجزای آن را بداند.
۲. بتواند یک دایره را به چند کمان مساوی تقسیم کند.
۳. با دانستن حالت های مختلف خط و دایره، بتواند با توجه به ویژگی داده شده شکل مربوطه را رسم کند.
۴. تعریف زاویه مرکزی و محاطی را بداند.
۵. بتواند از دانسته هایش در حل تمرینات و فعالیت های کتاب استفاده کند.

دایره:

همه ی نقاطی که فاصله آن ها از یک نقطه ثابت به یک اندازه باشد دایره را تشکیل می دهند.
 به نقطه ثابت، مرکز دایره می گوییم و فاصله هر نقطه تا مرکز دایره را شعاع دایره می نامیم. مرکز دایره با حرف O و شعاع دایره با حرف r نشان داده می شود. به طور خلاصه، دایره به مرکز O و شعاع r را به صورت $C(O, r)$ نشان می دهیم.

در شکل رو به رو محل مرکز دایره و یکی از شعاع های دایره مشخص شده است.



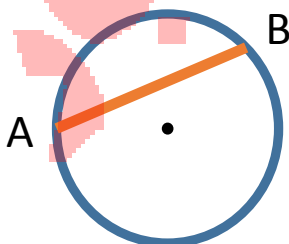
قطر دایره:

پاره خطی که دو نقطه دلخواه روی محیط دایره را به هم وصل کند و از مرکز دایره عبور می کند.

وتر دایره:

پاره خطی که هر دو نقطه دلخواه روی محیط دایره را به هم وصل می کند. بزرگترین وتر دایره، قطر دایره است.

در شکل رو به رو پاره خط AB یک وتر دایره است.

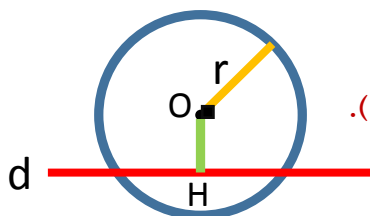


حالت های مختلف خط و دایره:

۱ یک خط و یک دایره ممکن است یک دیگر را در دو نقطه قطع کنند.

در این صورت رابطه ی رو به رو برقرار است: $OH < r$

(OH فاصله ی مرکز دایره تا خط d است که از شعاع دایره کوچک تر است).



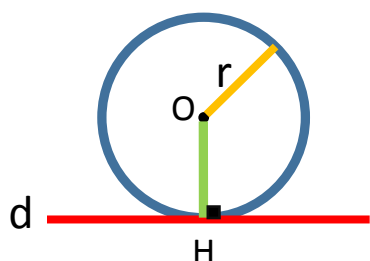
۲ خط و دایره فقط یک نقطه مشترک داشته باشند.

در این صورت رابطه رو به رو برقرار است: $OH = r$

نکته ۱: در این حالت می گوییم خط بر دایره مماس است.

نکته ۲: در اینجا OH هم شعاع دایره است که در

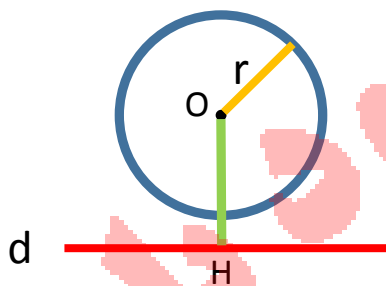
نقطه تماس بر خط مماس عمود است.



۳ خط و دایره ممکن است هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند.

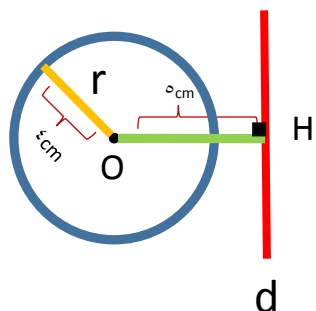
در این صورت رابطه رو به رو برقرار است: $OH > r$

(فاصله مرکز دایره تا خط از شعاع دایره بزرگتر است)



مثال: شعاع دایره ای ۴cm و فاصله مرکز دایره تا خط d ، ۵cm است. وضعیت خط و دایره را با رسم شکل نشان دهید.

پاسخ: در این حالت، خط و دایره هیچ نقطه ی مشترکی ندارند.

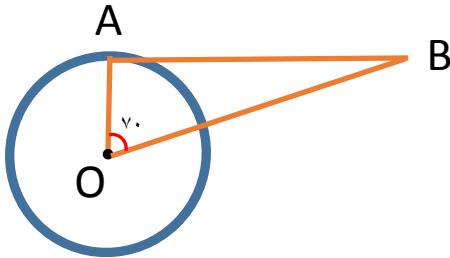


مثال: در شکل مقابل خط AB مماس بر دایره است. اندازه زاویه B را به دست آورید.

پاسخ: طبق نکته ۲ چون خط AB بر دایره مماس است پس شعاع دایره بر خط AB عمود است.

در نتیجه $\hat{A} = 90^\circ$ بنابراین:

$$\hat{B} = 180 - (70 + 90) = 20$$

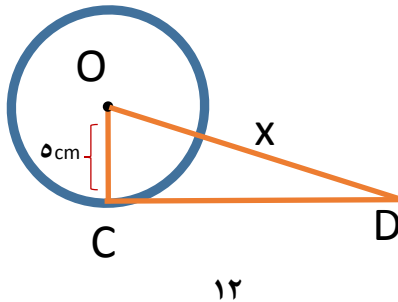


مثال: در شکل مقابل خط CD بر دایره مماس است. مقدار x را به دست آورید.

پاسخ: چون خط CD بر دایره مماس است پس زاویه $\hat{C} = 90^\circ$

در نتیجه مثلث COD قائم الزاویه است. با استفاده از رابطه فیثاغورس

مقدار x را به دست می آوریم.



$$x^2 = 12^2 + 5^2 \rightarrow 144 + 25 = 169$$

$$x^2 = 169 \rightarrow x = \sqrt{169} = 13$$

نکته: محیط دایره بر حسب درجه، برابر با ۳۶۰ درجه است.

تقسیم دایره به کمان های مساوی:

برای تقسیم یک دایره به چند کمان مساوی، طبق مراحل زیر عمل می کنیم:

۱ ابتدا شعاع دایره را رسم می کنیم. سپس محیط دایره (۳۶۰ درجه) را بر تعداد کمان های خواسته شده تقسیم می کنیم. نقاله را روی مرکز دایره قرار داده و به اندازه زاویه به دست آمده، روی دایره جدا می کنیم.

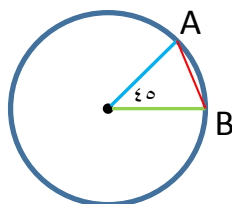
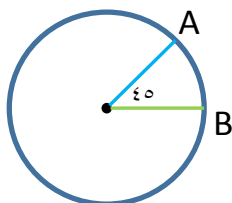
۲ دهانه پرگار را به اندازه وتر ایجاد شده باز می کنیم (پاره خط AB) و نوک پرگار را روی A یا B قرار می دهیم و به صورت متوالی کمان می زنیم.

مثال: دایره ای رسم کنید و آن را به ۸ قسمت مساوی تقسیم کنید.

پاسخ:

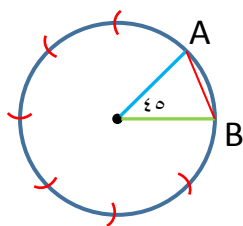
$$360^\circ \div 8 = 45^\circ$$

۱- ابتدا محیط دایره (360° درجه) را به ۸ تقسیم می کنیم



۲- A را به B وصل می کنیم و کمان AB ایجاد می شود.

۳- دهانه پرگار را به اندازه AB باز کرده، روی A یا B قرار داده و پشت سر هم کمان می زنیم.

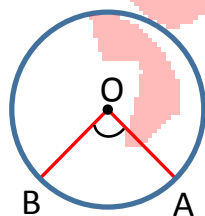


درحین کمان زدن، نباید فاصله دو پایه ی پرگار را تغییر دهیم.

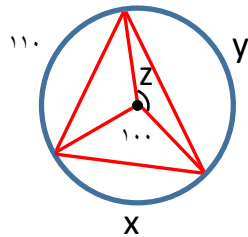
زاویه مرکزی:

زاویه ای که راس آن در مرکز دایره و اضلاع آن شعاع هایی از دایره باشند. اندازه زاویه مرکزی برابر

است با کمان رو به روی خودش.



در شکل مقابل زاویه $\widehat{O}$ یک زاویه مرکزی است. $\widehat{O} = \text{کمان } AB$



مثال: در شکل مقابل اندازه زاویه و کمان های خواسته شده را بنویسید.

پاسخ:

کمان x روبه روی زاویه مرکزی 100 درجه است. می دانیم اندازه زاویه مرکزی با کمان مقابلش یکی است.

بنابر این: $x \text{ کمان} = 100^\circ$

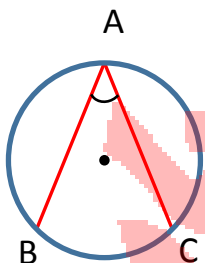
$$\text{کمان } y = 360 - (110 + 100) \rightarrow 360 - 210 = 150^\circ$$

زاویه Z یک زاویه مرکزی است و اندازه آن با کمان مقابلش یکی است.

بنابراین: کمان $y = \text{زاویه } Z = 150^\circ$ درجه

زاویه محاطی:

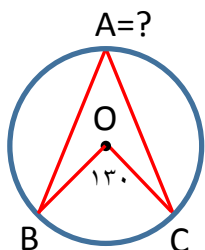
زاویه ای است که راس آن روی محیط دایره و دو ضلع آن وترهای دایره باشند. اندازه زاویه محاطی نصف کمان مقابلش است. در شکل مقابل زاویه $\hat{A}$ یک زاویه محاطی است.



$$\hat{A} = \frac{\text{کمان } BC}{2}$$

نکته: زاویه های محاطی مقابل به یک کمان با هم مساوی اند.

مثال: با توجه به اشکال زیر، اندازه زاویه ها و کمان های خواسته شده را به دست آورید.



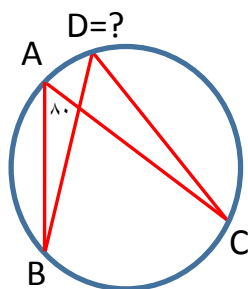
پاسخ ۱:

زاویه $A =$ چون زاویه مرکزی $\widehat{O}$ برابر 130° درجه است، پس کمان

مقابلش (کمان BC) هم 130° درجه است. زاویه $\widehat{A}$ زاویه محاطی است که

در مقابل کمان BC قرار گرفته است. بنابراین: $\widehat{A} = \frac{\text{کمان BC}}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$

پاسخ ۲:

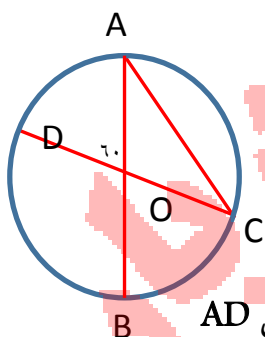


دو زاویه ی A و D دو زاویه محاطی مقابل به یک کمان هستند

در نتیجه با هم برابر اند. بنابراین: $\widehat{D} = \widehat{A} = 80^\circ$

کمان BC = اندازه هر کمان دو برابر زاویه محاطی مقابلش است.

بنابراین: $\text{کمان BC} = 80^\circ \times 2 = 160^\circ$



مثال: در شکل مقابل اندازه زاویه C را تعیین کنید. (O مرکز دایره است).

پاسخ:

زاویه $\widehat{AOD}$ زاویه مرکزی است. پس برابر است با کمان مقابلش.

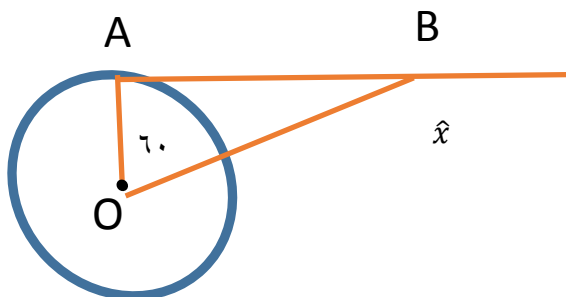
در نتیجه کمان AD برابر 60° درجه است. زاویه C یک زاویه محاطی روبرو به کمان AD

است. به زبان ریاضی: $\widehat{AOD} = \text{کمان AD} = 60^\circ$

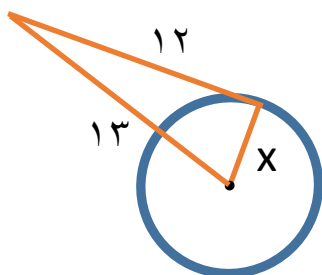
$$\widehat{C} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

(۱) حالت های مختلف دایره و خط را با رسم شکل نشان دهید.

(۲) در شکل روبه رو زاویه خواسته شده را بدست آورید.

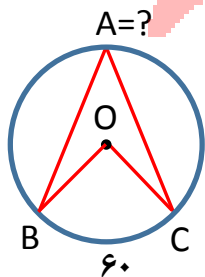


(۳) با توجه به شکل مقابل مقدار x را به دست آورید.



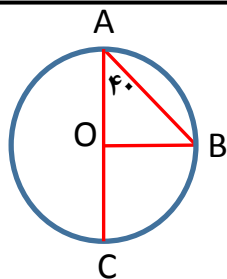
(۴) دایره ای به شعاع 6cm داریم و فاصله مرکز دایره تا خط d برابر 4cm است. وضعیت خط و دایره را با رسم شکل نشان دهید.

(۵) با توجه به شکل های مقابل، اندازه کمان ها و زاویه های خواسته شده را به دست آورید.

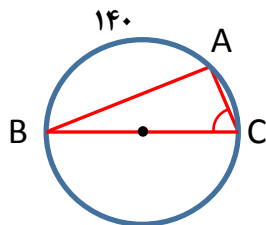


$$\hat{O} =$$

$$\hat{A} =$$



$\hat{O} =$
 $\hat{B} =$
کمان $BC =$



$\hat{A} =$
 $\hat{B} =$
 $\hat{C} =$
کمان $BC =$

دوره ریاضی دوازدهم