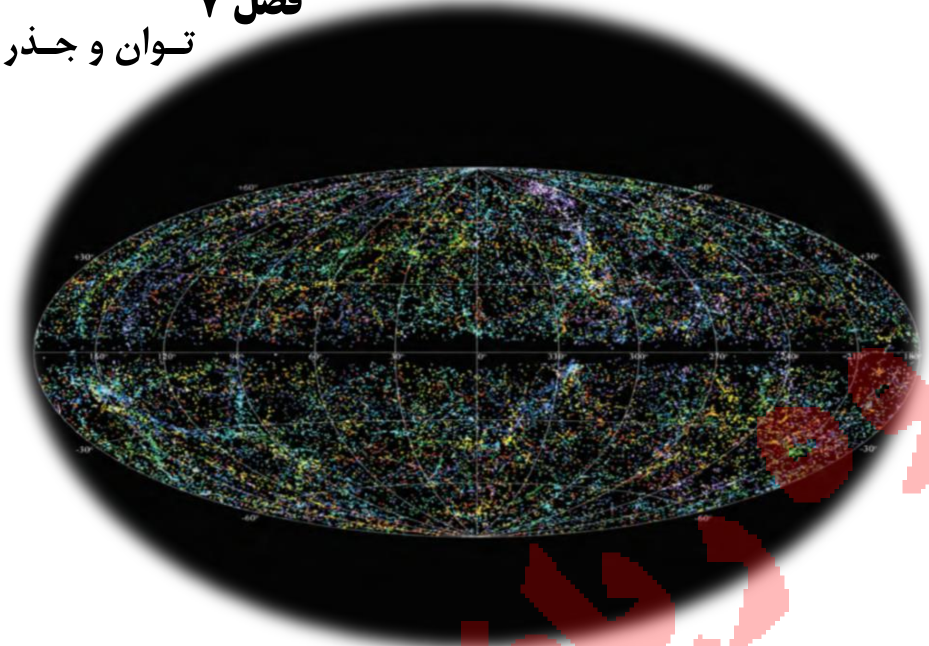
فصل ۷
توان و جذر



هدف کلی

توان یعنی خلاصه کردن عمل ضرب با یاد گرفتن این فصل دانش آموز یاد می گیرد که مسیر کوتاه را انتخاب کند به جای اینکه یک عبارت را چند بار در خودش ضرب کند از توان استفاده می کند

انتظارات از دانش آموزان در این درس:

۱ حاصل عبارت توان دار را به دست آورد

۲ قوانین ضرب و تقسیم اعداد تواندار با پایه ها و توان های مساوی را یاد بگیرد

۳ تجزیه یک عدد را و نوشتن آن به صورت توان دار را یاد بگیرد

۴ ساده کردن یک عبارت توان دار را یاد بگیرد

۵ خواص رادیکال ها را یاد بگیرد

۶ معنی جذر و کاربرد آن را یاد بگیرد

۷ باید بتواند جذر تقریبی را محاسبه کند

تـوان و جـذر

تعریـف: هرگاه عددی چند بار در خودش ضرب شود می‌توانیم آن‌را به‌صورت توان‌دار بنویسیم

مانند:

$$۵ \times ۵ \times ۵ = ۵^{۳}$$

توان ← ۳، پایه ← ۵

$$۰/۳ \times ۰/۳ \times ۰/۳ = ۰/۳^{۳}$$

$$\left(\frac{۱}{۵}\right) \times \left(\frac{۱}{۵}\right) = \left(\frac{۱}{۵}\right)^{۲}$$

حالت کلی: $\underbrace{a.\, a.\, a.\, ...a}_{\text{n بار}} = a^{n}$

ذکر چند نکته:

۱ یک به توان هر عدد می‌شود خود یک: $۱^{۵} = ۱$

۲ هر عدد به توان یک می‌شود خود آن عدد: $۵^{۱} = ۵$

۳ صفر به توان هر عدد (بجز صفر به توان صفر) می‌شود صفر: $۰^{۵} = ۰$

۴ هرعدد به توان صفر می‌شود یک (بجز صفر به توان صفر):

$$۵^{۰} = ۱ \qquad \left(\frac{۲}{۵}\right)^{۰} = ۱ \qquad (-۲)^{۰} = ۱$$

۵ هر عددی توان ندارد توانش یک است: $۷ = ۷^{۱}$

۶ اگر یک عدد توان‌دار مجدداً به توان برسد توان‌ها درهم ضرب می‌شود مانـنـد:

$$\left(۲^{۳}\right)^{۲} = ۲^{۶} \qquad \left(\left(۳^{۲}\right)^{۳}\right)^{۴} = ۳^{۲۴}$$

۷ اگر یک عدد توان‌دار مجدداً توان بگیرد از بالا توان را به توان می‌رسانیم و حاصل را به عنوان توان جدید برای پایه قبل قرار می‌دهیم:

$$۲^{\boxed{۲^{۲}}} = ۲^{۴} \qquad ۲^{۲^{\boxed{۳^{۲}}}} = ۲^{۲^{۹}} = ۲^{۵۱۲}$$

۸ اگر عددی منفی داخل پرانتز باشد و به توان زوج برسد حاصل می‌شود مثبت و اگر به توان فرد برسد حاصل منفی می‌شود مانـنـد:

$$(-۲)^{۲} = ۴$$

$$(-۲)^{۳} = -۸$$

۹ اگر منفی داخل پرانتز نباشد چه به توان فرد برسد یا به توان زوج برسد حاصل می‌شود منفی

مانـنـد:

$$-۲^{۳} = -\overbrace{(۲ \times ۲ \times ۲)}^{۸} = -۸$$

$$-۲^{۲} = -\overbrace{(۲ \times ۲)}^{۴} = -۴$$

۱۰ توان منفی: هرگاه عددی به توان عدد منفی برسد پایه معکوس می‌شود و توان منفی به مثبت تبدیل می‌شود مانند:

$$\left(\frac{۴}{۵}\right)^{-۲} = \left(\frac{۵}{۴}\right)^{۲} \qquad ۵^{-۲} = \left(\frac{۱}{۵}\right)^{۲}$$

مثال: عبارت مقابل را به صورت توان‌دار بنویسید:

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵} \times ۲^{-۳} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵} \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۸}$$

۱۱ توان دوم هر عدد را مجذور یا مربع و توان سوم هر عدد را مکعب آن عدد را گویند:

مثال: اختلاف مکعب ۴ و مربع ۰/۵ را بدست آورید:

$$۴^{۳} - (۰/۵)^{۲} = ۶۴ - ۰/۲۵ = ۶۳/۷۵$$

ذکر یک نکته مهم:

اگر جمع و تفریق داخل پرانتز باشد و روی پرانتز توان داشته باشیم حتماً

باید حاصل پرانتز را بدست آوریم بعد به توان برسانیم اما اگر ضرب و تقسیم باشد به دو روش

می توان عمل کرد یعنی هم می‌توانیم حاصل پرانتز را بدست آوریم بعد به توان برسانیم هم

می توانیم هر یک از اعداد داخل پرانتز را به توان برسانیم سپس ضرب یا تقسیم کنیم

مثال: حاصل عبارت مقابل را بدست آورید:

$$(\overset{۸}{\cancel{۵+۳}})^{۲} = ۸^{۲} = ۶۴$$

$$\left(\overset{۵}{\cancel{۸-۳}}\right)^{۲} = ۵^{۲} = ۲۵$$

$$(۲\times۳)^{۲} = \begin{cases} ۲^{۲}\times۳^{۲} = ۴\times۹ = ۳۶ \\ ۶^{۲} = ۳۶ \end{cases}$$

$$(۸\div۲)^{۲} = \begin{cases} ۸^{۲}\div۲^{۲} = ۶۴\div۴ = ۱۶ \\ ۴^{۲} = ۱۶ \end{cases}$$

ضرب اعــداد تــوان‌دار: حالــت اول

برای نوشتن یک عدد به صورت توان‌دار باید رابطه داشته باشیم. منظور از رابطه یعنی یا پایه‌ها مساوی باشد یا توان‌ها.

تعــریف ۱: در ضرب اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی یکی از پایه‌ها را نوشته توان‌ها را باهم جمع می‌کنیم مانـنــد:

$$۵^{۲}\times۵^{۴} = ۵^{۶}$$

تعـریف ۲: در ضرب اعداد تواندار با توان مساوی، یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم مانـنــد:

$$۶^{۷}\times۳^{۹}\times۰/۵^{۷} = ۳^{۷}\times۳^{۹} = ۳^{۱۶}$$

۳/۰

تعــریف ۳: در تقسیم اعداد تواندار،اگر توان‌ها برابر باشد یکی از توان‌ها را نوشته و پایه‌ها را برهم تقسیم می‌کنیم.

$$4^5 \div 2^5 = 2^5$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^5 \div \left(\frac{9}{16}\right)^5 = \left(\frac{\overset{5}{\overbrace{\cancel{15}}}}{4} \times \frac{\overset{4}{\overbrace{\cancel{16}}}}{9}\right)^5 = \left(\frac{20}{3}\right)^5 \qquad 3^7 \div 2^7 = \left(\frac{3}{2}\right)^7$$

$$\frac{24^7}{4^7} = 6^7$$ خط کسری نشان دهنده تقسیم

تعــریف ۴: در تقسیم عبارات تواندار اگر پایه ها برابر باشند یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم. مانـنـد:

$$5^{12} \div 5^3 = 5^9$$

$$(3/5)^4 \div \left(\frac{7}{2}\right) = (3/5)^3$$

حالــت دوم:

اگر رابطه نبود باید رابطه ایجاد کنیم یا باید هم پایه کنیم یا هم توان راه‌های ایجاد رابطه:

۱ تجزیــه کردن:

مثال: حاصل عبارت‌های مقابل را به صورت عددی توان‌دار بنویسید؟

$$27^4 \times 3^2 = \underbrace{(3^3)^4}_{3^{12}} \times 3^2 = 3^{14} \qquad \underbrace{9}_{3^2} \times 3^5 = 3^2 \times 3^5 = 3^7$$

تجزیه

$$۲۵^{۳} \div ۵^{۴} = \underbrace{\left(۵^{۲}\right)^{۳}}_{۵^{۶}} \div ۵^{۴} = ۵^{۲}$$

تجزیه

$$۱۶ \times ۲^{۳} = ۲^{۴} \times ۲^{۳} = ۲^{۷}$$

تجزیه

$$۳۲^{۴} \times ۱۶^{۲} = \left(۲^{۵}\right)^{۴} \times \left(۲^{۴}\right)^{۲} = ۲^{۲۰} \times ۲^{۸} = ۲^{۲۸}$$

تجزیه — تجزیه

الف) ۱۶ برابر عدد $۲^{۱۳}$ را به صورت توان‌دار بنویسید:

$$۱۶ \times ۲^{۱۳} = ۲^{۴} \times ۲^{۱۳} = ۲^{۱۷}$$

تجزیه

ب) ثلث عدد $۳^{۸}$ ؟ $\frac{۱}{۳}$

$$۳^{۸} \div ۳ = ۳^{۷}$$

نکته: $۳^{۸}$ را تقسیم بر مخرج کسر می‌کنیم یا مانـنــد:

$$\frac{۳^{۸}}{۱} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۳^{۸}}{۳} = ۳^{۷}$$

ج) نصف ثلث عدد $۶^{۲۵}$ ؟

$$۶^{۲۵} \div ۶ = ۶^{۲۴} \qquad \text{نصف ثلث} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶}$$

مثال: کسرهای مقابل را به صورت توان‌دار بنویسید؟

$$\frac{۱}{۱۲۵} = \frac{۱}{۵^{۳}} = \left(\frac{۱}{۵}\right)^{۳}$$

$$\frac{۱۶}{۸۱} = \frac{۲^{۴}}{۳^{۴}} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۴}$$

۲ تبدیل جمع به ضرب:

هرگاه چند عدد توان‌دار مساوی باهم جمع شوند می‌توانیم جمع را به ضرب تبدیل کنیم تا رابطه برقرار شود.

مثال: هریک از عبارت های مقابل را به صورت تواندار بنوسید؟

تعداد

$$۲^{۲۰} + ۲^{۲۰} = ۲ \times ۲^{۲۰} = ۲^{۲۱}$$

$$۴^{۱۲} + ۴^{۱۲} = ۲ \times ۴^{۱۲} = ۲ \times \left(۲^{۲}\right)^{۱۲} = ۲ \times ۲^{۲۴} = ۲^{۲۵}$$

تجزیه

۳ رابطه مخفی:

عبارت توان‌داری که ظاهراً پایه مختلف است اما در واقع پایه‌ها برابرند: مانند:

الف) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵} \times ۰/۵^{۳} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۸}$

ب) $(۰/۲)^{۶} \times \left(\frac{۱}{۵}\right)^{۳} = \left(\frac{۱}{۵}\right)^{۹}$

ج) $\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۹} \div \underbrace{(۰/۶)^{۳}}_{\frac{۶}{۱۰} = \frac{۳}{۵}} = \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۶}$

۴ هم‌توان کردن:

برای ایجاد رابطه گاهی می‌توانیم عبارت را هم توان کنیم مانند:

مثال: حاصل عبارتهای مقابل را به صورت تواندار بنویسید

الف) $۸ \times ۵^{۳} = ۲^{۳} \times ۵^{۳} = ۱۰^{۳}$

ب) $۷^{۴} \times ۱۶ = ۷^{۴} \times ۲^{۴} = ۱۴^{۴}$

ج) $۲^{۲۱} \times ۳^{۱۴} = (۲^{۳})^{۷} \times (۳^{۲})^{۷} = ۸^{۷} \times ۹^{۷} = ۷۲^{۷}$

حاصل عبارت مقابل را به ازای مقادیر داده شده بدست آورید؟ $a = -۲$ ، $b = -۳$ ، $c = -۱$

$$a\left(b^{۲} + ۲ac\right)$$

$$-۲\Big(\underbrace{\left(\cancel{-}۳\right)^{۲}}_{۹} + \underbrace{۲\left(\cancel{-}۲\right)\left(\cancel{-}۱\right)}_{۴}\Big) = -۲ \times ۱۳ = -۲۶$$

۱۳

ساده کردن عبارت‌های توان‌دار:

مثال: حاصل هر کسر را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

ذکر چند مثال:

الف) $$\frac{\cancel{۵^{۶}}^{\,۵^{۳}} \times \cancel{۳^{۱۰}}^{\,۳^{۳}}}{\cancel{۳^{۷}}_{\,۱} \times \cancel{۵^{۵}}_{\,۱}} = ۵^{۳} \times ۳^{۳} = ۱۵^{۳}$$

ب) $$\frac{x^{۱۲} \times y^{۹}}{\underbrace{x^{۱۰}}_{۱} \times \underbrace{y^{۱۱}}_{y^{۲}}} = \frac{x^{۲}}{y^{۲}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{۲}$$

عبارت‌های مقابل را به صورت توان‌دار بنویسید؟

الف) $$\frac{۱۲^{۴} \times ۱۲ \times ۱۲^{۳}}{۴^{۸}} = \frac{۱۲^{۸}}{۴^{۸}} = ۳^{۸}$$

ب) $\left(۲^{۳}\right)^{۴} \times \left(۳^{۶}\right)^{۲} \times ۶^{۵} = ۲^{۱۲} \times ۳^{۱۲} \times ۶^{۵} = ۶^{۱۲} \times ۶^{۵} = ۶^{۱۷}$

ج) $\overbrace{\left[\left(\frac{\cancel{۲}^{\,۱}}{\cancel{۳}_{\,۱}}\right)^{۱۰} \times \left(\frac{\cancel{۹}^{\,۳}}{\cancel{۲}_{\,۱}}\right)^{۱۰}\right]}^{۳^{۱۰}} \div ۳^{۵} = ۳^{۱۰} \div ۳^{۵} = ۳^{۵}$

هرگاه هم پایه‌ها و هم توان‌ها مساوی باشد از یکی از قواعد ضرب استفاده می‌کنیم. مانـنــد:

$۲^{۳} \times ۲^{۳} = \begin{cases} \rightarrow\ ۲^{۶} = ۶۴ \\ \rightarrow\ ۴^{۳} = ۶۴ \end{cases}$

یادآوری: در سال گذشته آموختیم:

تعریف: جذر یعنی عددی را پیدا کنیم که اگر آنرا در خودش ضرب کنیم حاصل آن برابر عدد زیر رادیکال شود جذر را با علامت $\sqrt{}$ که رادیکال نام دارد نمایش می‌دهند.

$۵=\sqrt{۲۵}\rightarrow$ به عدد۵ جذر عدد ۲۵می‌گوییم و به ۲۵ مجذور عدد ۵ گفته می‌شود.

$۲۵=۵^۲=$ مجذور ۵

انواع جذر:
- جذرهای کامل یا دقیق
- جذرهای تقریبی

جذرهای کامل:

جذرهایی هستند که جواب آنها یک عدد صحیح می‌باشد و به این اعداد مجذور کامل یا مربع کامل نیز گفته می شود.

مانند: ۱و۴ و ۹ و۱۶ و ۲۵ و۳۵ و...

$\sqrt{\frac{۱}{۳۶}}=\frac{۱}{۶}$ $\sqrt{۴۹}=۷$ $\sqrt{۲۵}=۵$

ذکر چند نکته:

۱ هر عدد دو ریشه دوم دارد یکی مثبت و دیگری منفی که جذر هر عدد ریشه دوم مثبت آن عدد است.

مثال: ریشه‌های دوم عددهای زیررا بدست آورید:

$\sqrt{۹}=۳$: جذر۹　　ریشه‌های دوم ۹ ← ۳ ، ۳-

$\sqrt{۱۶}=۴$: جذر۱۶　　ریشه‌های دوم ۱۶ ← ۴ ، ۴-

۲ اعداد منفی جذر ندارند زیرا حاصل ضرب دو عدد مثبت عددی مثبت، حاصل ضرب دو عدد منفی نیز عددی مثبت است. بنابراین در هیچ حالتی حاصل ضرب دو عدد یکسان منفی نمی شود.

ندارد جذر $\sqrt{-۸۱}$

۳ عدد یک و صفر جذرشان با خودشان برابر است .

$\sqrt{۰}=۰$　　و　　$\sqrt{۱}=۱$

۴ بین هر دو عدد متفاوت بی نهایت عدد می توان نوشت :

مثال: ۵ عدد بین $\sqrt{۱۱}$ و $\sqrt{۱۷}$ بنویسید:

۳/۸ و ۳/۷ و ۳/۶ و ۳/۵ و ۳/۴　　$\sqrt{۱۱}\simeq ۳/۳$

$\sqrt{۱۷}\simeq ۴/۱$

۵ جذر اعداد بزرگتر از یک از خودشان کوچکتر است مانند: $\sqrt{25}=5$

جذر اعداد بین صفر و یک از خود عدد بزرگتر است $\sqrt{0/25}=0/5$

جذر تقریبی:

عددهایی که مجذور کامل نیستند و جذر آنها به صورت اعشاری به دست می‌آید جذر تقریبی گویند مانند:

$\sqrt{5}\simeq 2/2$

$\sqrt{23}\simeq 4/7$

روش محاسبه جذر تقریبی :

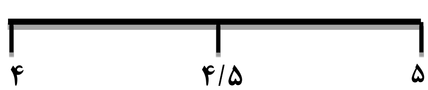
ابتدا باید مشخص کنیم عددی که می‌خواهیم از آن جذر بگیریم بین کدام دو مجذور کامل قرار دارد. سپس با جذرگرفتن از آن دو عدد مشخص می‌شود. بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد

بعنوان **مثال:**

$$\underset{4}{\sqrt{\cancel{16}}}<\sqrt{18}<\underset{5}{\sqrt{\cancel{25}}}$$

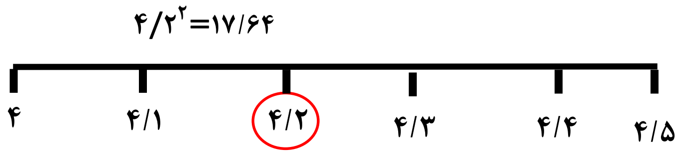
که در این مسئله $\sqrt{18}$ بین دو عدد ۵ و ۴ قرار دارد.

مرحله بعد : یک محور فرضی که دو عدد ۴ و ۵ را روی آن مشخص کرده‌ایم رسم می‌کنیم.



وسط آن را پیدا کرده و عدد آن را می‌نویسیم. چون $\sqrt{۱۸}$ به $\sqrt{۱۶}$ نزدیک‌تر است بین ۴ و ۴/۵ را

۰/۱ ، ۰/۱. تقسیم می‌کنیم.



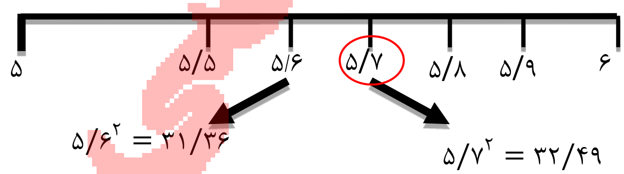
آنگاه هر یک از اعداد را به توان ۲ می‌رسانیم هر کدام به $\sqrt{۱۸}$ نزدیکتر بود جواب می‌شود .

در مثال بالا : $(۴/۲)^۲=۱۷/۶۴$ که جواب است.

$\sqrt{۱۸}\simeq ۴/۲$

مثال: مقدار تقریبی $\sqrt{33}$ را بدست آورید:

$\overset{۵}{\sqrt{۲۵}}<\sqrt{۳۳}<\overset{۶}{\sqrt{۳۶}}$



$\sqrt{۳۳}\simeq ۵/۷$

خـــواص رادیکـــالها :

۱ جذر های حاصل ضرب و یا تقسیم را به دو صورت می توان حل کرد.

الف) هم می توان دو عدد زیر رادیکال را ضرب یا تقسیم کرد سپس از حاصل آن جذر گرفت.

ب) هم می‌توان از هر یک از اعداد زیر رادیکال جذر گرفت سپس حاصل را ضرب یا تقسیم کرد.

مثال: حاصل جذر های زیر را به دست آورید :

$\sqrt{۴\times ۲۵} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$

$\sqrt{۴\times۲۵} = \sqrt{۴}\times \sqrt{۲۵}= ۲\times۵= ۱۰$

$\sqrt{۸۱\div۹} = \sqrt{۹} = ۳۱$

$\sqrt{۸۱\div۹} = \sqrt{۸۱}\div\sqrt{۹} = ۹\div۳ = ۳$

تذکر: گاهی اوقات می‌توانیم مانند زیر عمل کرد با ضرب رادیکالها راحت‌تر و دقیق‌تر می‌توان به جواب رسید.

مثال۱: $\sqrt{۲۰} \times \sqrt{۵} = \sqrt{۲۰\times۵} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$

مثال۲: $\sqrt{۲} \times \sqrt{۸} = \sqrt{۱۶} = ۴$

مانند:

۱ $\sqrt{\frac{۱۶}{۴}} = \sqrt{۴} = ۲$

۲ $\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۸}{۲}} = \sqrt{۴} = ۲$

جذرهای ترکیبی :

مثال: حاصل جذرهای مقابل را بدست آورید:

$\sqrt{\sqrt{۸۱}}=\sqrt{۹}=۳$

$\sqrt{۷۷ + \sqrt{۱۶}} = \sqrt{۷۷+۴} = \sqrt{۸۱} = ۹$

۲ در جمع و تفریق رادیکالها نمی‌توانیم آنها را از هم جدا کنیم و جداگانه زیر رادیکال ببریم (مانند ضرب و تقسیم) بلکه باید زیر رادیکال را حل کرد سپس جذر بگیریم.

مانـــند:

$$\sqrt{۱۶ + ۹} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

$$\sqrt{۱۰۰ - ۳۶} = \sqrt{۶۴} = ۴$$

ســـاده کردن رادیکـــالها:

اگر اعداد زیر رادیکال جذر دقیق نداشته باشند و بتوانیم آنها را به صورت حاصل ضرب دو عدد طوری بنویسیم که یک یا چند تا از اعداد مجذور کامل باشند آن عدد را ساده می کنیم:

مثال۱: $\sqrt{۲۰} = \sqrt{۴} \times \sqrt{۵} = ۲\sqrt{۵}$

مثال۲: $\sqrt{۱۲} = \sqrt{۴} \times \sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$