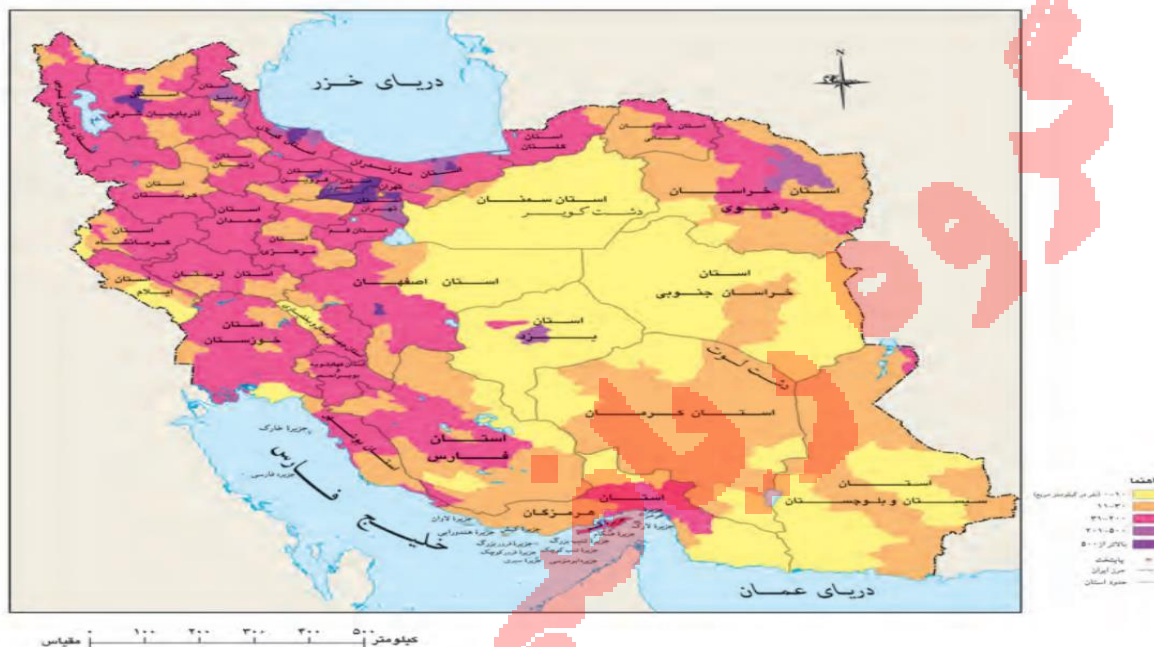


فصل ۱

اعداد صحیح و گویا



هدف کلی

انتظارات از دانش آموزان در این درس:

- ۱ اعداد صحیح را که در سال گذشته آموخته به خاطر آورد.
- ۲ اعداد گویا را بشناسد.
- ۳ بتواند بر روی محور اعداد گویا، قرینه‌ی عدد گویا و عدد متناظر با بردار گویا را نمایش دهد.
- ۴ به کمک محور و بدون محور کسرهای مساوی را نمایش دهد.
- ۵ بتواند بین دو عدد گویا کسرهای جدید بنویسد.
- ۶ به کمک چهار عمل اصلی ریاضی حاصل عبارت‌های گویا را بدست آورد.
- ۷ عبارت‌های ترکیبی را حل کند.

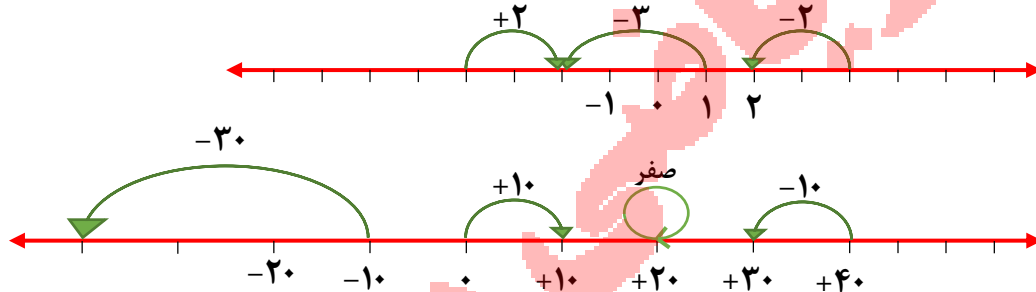
تعریف عدد صحیح

به عدد صفر و اعداد طبیعی که در سمت راست صفر قرار دارند و با علامت + و اعداد منفی که در سمت چپ صفر قرار دارند و با علامت - نمایش داده می‌شوند اعداد صحیح می‌گویند.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

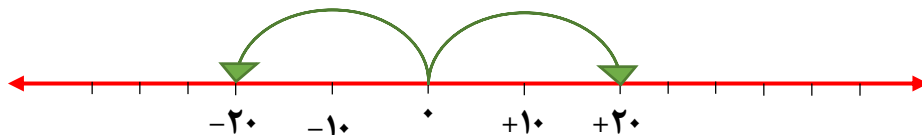
حرکت روی محور

برای مشخص کردن عدد صحیح مربوط به محور، ابتدا با توجه به جهت حرکت علامت آن را مشخص می‌کنیم (حرکت به راست علامت مثبت + و حرکت به سمت چپ علامت - منفی) سپس با شمارش واحدهای محور، عدد مربوط به حرکت را مشخص می‌کنیم.



قرینه عدد صحیح

اگر به اندازه‌ی فاصله‌ی صفر تا هر عدد روی محور در جهت خلاف آن حرکت کنیم قرینه‌ی عدد مورد نظر به دست می‌آید.



$$-(-20) = +20$$

نکته: قرینه را با علامت (-) نمایش می دهند

عدد صحیح	۶	-۴	$-(-۷)$	۰	+۸	-۵	+۳
قرینه آن	-۶	+۴	-۷	۰	-۸	+۵	-۳

قرینه هر عدد صحیح برابر است با خود آن عدد با علامت مخالفش.

نکته ۱: اعداد مثبت از صفر بزرگترند.

نکته ۲: اعداد منفی از صفر کوچکترند.

نکته ۳: صفر بی علامت است یعنی نه مثبت است نه منفی.

نکته ۴: در اعداد صحیح، عددی بزرگتر است که در محور اعداد در سمت راست دیگری قرار بگیرد.

نکته ۵: قرینه‌ی قرینه‌ی هر عدد صحیح برابر است با خود آن عدد.

نکته ۶: قرینه‌ی صفر برابر است با خود صفر.

تعیین علامت در جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد صحیح

جمع و تفریق

$$+ = (+) + (+)$$

$$- = (-) + (-)$$

$$= (+) + (-)$$

$$= (-) + (+)$$

ضرب و تقسیم

$$+ = (+) \times (+)$$

$$+ = (-) \times (-)$$

$$- = (+) \times (-)$$

$$- = (-) \times (+)$$

در جمع اعداد صحیح، هم علامت‌ها با هم جمع می‌شوند و علامت خودشان را می‌گیرند و مختلف
العلامت‌ها از هم کم می‌شوند و علامت عدد بزرگتر (از لحاظ شمارش) را می‌گیرند.

مثال:

$$\begin{array}{llll} -12 + 16 = +4 & +8 - 12 = -4 & +9 + (-3) = +6 & -4 - 8 = -12 \\ -3 \times 7 = -21 & -8 \div (-4) = 2 & -12 \div 2 = -6 & -4 \times (-3) = +12 \end{array}$$

یکی از ریاضی‌دانان بزرگ در کودکی جمع عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را با روشی ابتکاری محاسبه کرد.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 =$$

$$\frac{100(100+1)}{2} = 5050$$

حاصل جمع اعداد طبیعی اولیه از عدد ۱ تا n:

$$\frac{n \times (n + 1)}{2}$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید. روش کار را توضیح دهید.

$$-2 + 4 - 6 + 8 - 10 + 12 = (-2 + 4) + (-6 + 8) + (-10 + 12) = 2 \times 3 = 6$$

حاصل هر جفت عدد برابر ۲ می شود

محاسبات ترکیبی اعداد صحیح

در این گونه محاسبات طبق اولویت‌ها پیش می‌رویم.

۱ پرانتز و گروه

۲ توان یا رادیکال

۳ ضرب یا تقسیم

۴ جمع یا تفریق

مثال: حاصل عبارت‌های مقابل را با توجه به ترتیب عملیات بدست آورید؟

$$-8 - 3 \times 5 = -8 - 15 = -23$$

$$-16 \div 2 \times 3 - 4 = -8 \times 3 - 4 = -24 - 4 = -28$$

معرفی عدد گویا

هر کسری که صورت و مخرج آن به صورت عددی صحیح باشد و مخرج کسر مخالف صفر باشد را عدد گویا می‌گویند.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

نکات :

* اعداد طبیعی، اعداد حسابی و اعداد صحیح همه عدد گویا هستند.

* اعداد گویا مانند اعداد صحیح علامت دار هستند.

* اعداد گویا مانند اعداد صحیح دارای قرینه هستند.

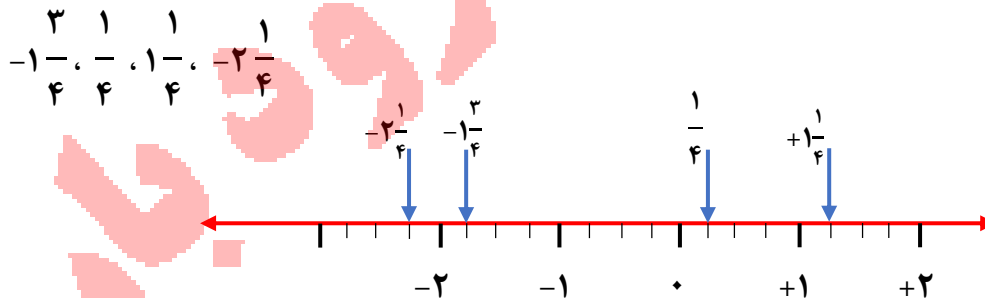
نمایش عددهای گویا روی محور

۱ واحدهای محور را به تعداد عدد مخرج کسر، تقسیم می کنیم.

۲ با توجه به علامت عدد، جهت حرکت را مشخص می کنیم. علامت (+) حرکت به سمت راست و علامت منفی (-) حرکت به سمت چپ.

۳ به تعداد عدد صورت کسر از صفر، واحدهای تقسیم شده (ریز واحدها) را می شماریم.

مثال: عدد های مقابل را روی محور نمایش دهید؟

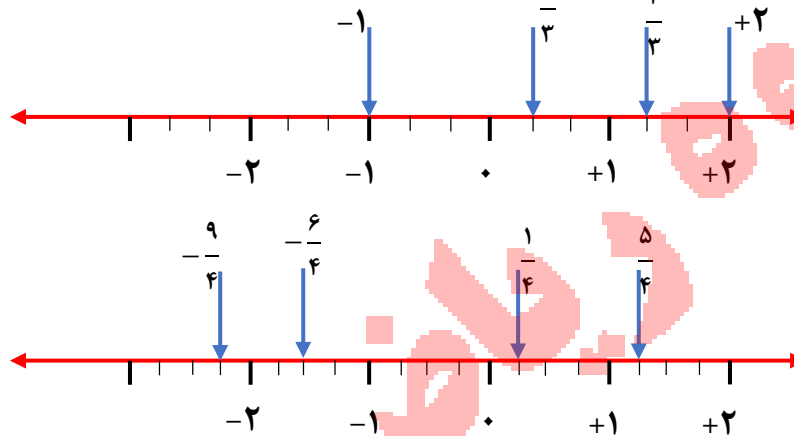


نمایش عدد مربوط به نقطه روی محور

۱ با توجه به جای نقطه، علامت آن را مشخص می‌کنیم.

۲ تعداد تقسیم‌های هر واحد (ریز واحدها) را در مخرج کسر می‌نویسیم.

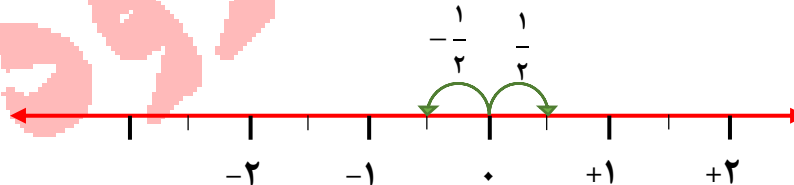
۳ تعداد ریز واحدها را از صفر شمارش کرده و عدد حاصل را در صورت می‌نویسیم.



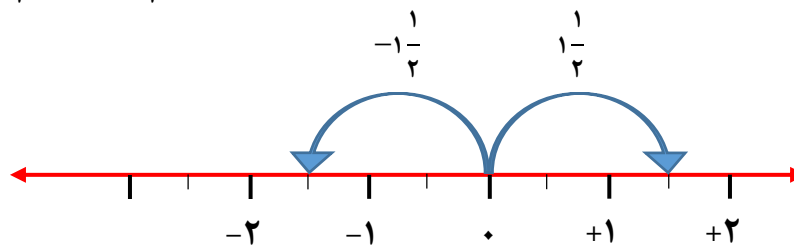
قرینه‌ی عدد گویا

برای نمایش قرینه‌ی عدد گویا کافی است به اندازه‌ی بردار داده شده در جهت خلاف از صفر ریز

واحدها را بشماریم و نقطه‌ی قرینه را مشخص کنیم.



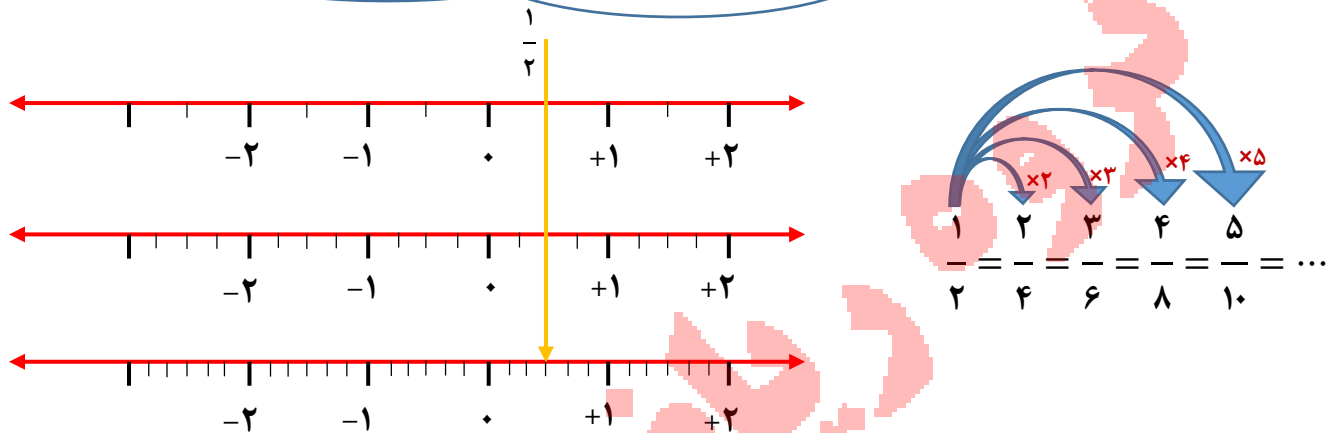
$$-\left(+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$



$$-\left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{1}{2}$$

نکته: با ضرب صورت و مخرج کسر در اعداد طبیعی می توان

کسرهایی مساوی با آن کسر نوشت



در تساوی دو کسر اگر یکی از عددها مجهول بود به کمک تساوی کسرها می توان مقدار مجهول را به دست آورد.

$$\frac{3}{7} = \frac{x}{28} \rightarrow x = 3 \times 4 = 12$$

ولی بهترین راه و کلی ترین راه در این حالت طرفین - وسطین کردن می باشد.

$$\frac{x}{10} = \frac{10}{4} \rightarrow x = \frac{10 \times 10}{4} = \frac{100}{4}$$

نکته: برای به دست آوردن ب.م.م ابتدا دو عدد را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم سپس حاصل

ضرب عامل‌های مشترک دو عدد را حساب می‌کنیم سپس می‌توانیم صورت و مخرج را بر ب.م.م

تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{r} \div 14 \\ \begin{array}{r} 56 \\ - 4 \\ \hline 210 \\ - 15 \\ \hline \end{array} \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \\ 56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \end{array} \right. \rightarrow 2 \times 7 = 14$$

ب.م.م

مقایسه‌ی عددهای گویا

در عددهای مثبت با صورت مساوی هرچه مخرج بزرگ‌تر باشد، کسر کوچکتر است.

$$\frac{3}{7} > \frac{3}{10}$$

در عددهای منفی با صورت مساوی هرچه مخرج بزرگ‌تر باشد، کسر بزرگتر است.

$$-\frac{3}{7} < -\frac{3}{10}$$

در عددهای مثبت با مخرج مساوی هر چه صورت بزرگتر باشد، کسر، بزرگتر است.

$$\frac{5}{9} > \frac{2}{9}$$

در عددهای منفی با مخرج مساوی ، هر چه صورت بزرگ تر باشد، کسر کوچکتر است.

$$-\frac{5}{9} < -\frac{4}{9}$$

***نکته:** بهتر است برای مقایسه دو کسر ابتدا آنها را هم مخرج کنیم.

تبدیل عدد مخلوط به کسر

(جزء صحیح $\times$ مخرج) + صورت = صورت جدید و مخرج = مخرج قبلی

تبدیل کسر به عدد مخلوط

کافی است که صورت کسر بزرگتر از واحد را بر مخرج آن تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 7 \\ \hline 1 & -5 \\ \hline 2 & \end{array}$$

خارج قسمت = جزء صحیح

باقی مانده = صورت کسر

مقسوم علیه = مخرج

مثال: کسر ها را به عدد مخلوط و عدد مخلوط را به کسر تبدیل کنید.

$$+3\frac{1}{4} = \frac{(3 \times 4) + 1}{4} = \frac{13}{4}$$

$$-\frac{7}{5} = -1\frac{2}{5}$$

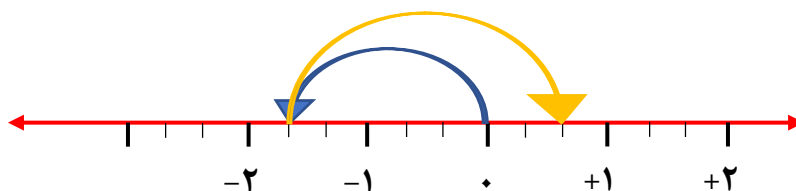
$$+\frac{14}{3} = +4\frac{2}{3}$$

$$-2\frac{1}{3} = -\frac{(2 \times 3) + 1}{3} = -\frac{7}{3}$$

جمع اعداد گویا

جمع متناظر با حرکت روی محور

ابتدا با توجه به جهت حرکتها، علامت آنها را مشخص کرده، سپس با شمارش واحدها و ریز واحدها عدد حرکت را به دست می آوریم و در پایان نقطه‌ی انتها حاصل جمع حرکتها می باشد.



$$-1\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

یا

$$-\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

تفریق اعداد صحیح

تفریق در اعداد صحیح باید به جمع تبدیل شود.

تبدیل تفریق به جمع

برای تبدیل تفریق به جمع ابتدا کسر اول را می‌نویسیم.

به جای تفریق جمع می‌گذاریم.

کسر دوم را قرینه می‌کنیم

$$\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\left(+\frac{3}{4}\right) - \left(+\frac{8}{4}\right) = \frac{3}{4} + \left(-\frac{8}{4}\right) = -\frac{5}{4}$$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا بدون محور

برای محاسبه‌ی حاصل جمع یا تفریق عددهای گویا ابتدا تعیین علامت (مختصر نویسی - ساده

نویسی) به این صورت که پرانتزها را حذف کرده و اگر عددی بیشتر از یک علامت داشت علامت‌های

آن را در هم ضرب کرده تا به یک علامت تبدیل شود.

پس از تعیین علامت به یکی از حالت‌های زیر بر می‌خوریم:

۱- مخرج‌ها مساوی باشند

در این حالت حاصل جمع صورت‌ها را بدست آورده و یکی از مخرج‌ها را می‌نویسیم.

$$\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{6}{4}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{6}{4} = +\frac{3}{4}$$

۲- مخرج‌ها مساوی نباشند

ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم. برای این کار از (ک م م) مخرج‌ها استفاده می‌کنیم.

اگر مخرج‌ها عدد اول بودند، دو مخرج را در هم ضرب می‌کنیم و به همان اندازه صورت‌ها را تغییر می‌دهیم.

$$\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = +\frac{-3+4}{6} = +\frac{1}{6}$$

۳- اگر مخرج یکی از کسرها یک باشد (یا مخرج نداشته باشد)

در این حالت مخرج کسر دیگر را به عنوان مخرج مشترک در نظر می‌گیریم و مخرج مشترک

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{1} = +\frac{3-10}{5} = -\frac{7}{5}$$

می‌گیریم.

۴- اگر یکی از مخرج‌ها بر مخرج دیگری بخشپذیر باشد

در این حالت مخرجی که بزرگتر می‌باشد را به عنوان (ک م م) در نظر می‌گیریم.

$$\left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{4}{18} = \frac{-15+4}{18} = -\frac{11}{18}$$

استفاده از ک.م.م برای مخرج مشترک

$$\frac{5}{8} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{8} + \frac{1}{6} = \frac{15+4}{24} = \frac{19}{24}$$

$$3 \times 2 = 6$$

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$$

جمع اعداد اعشاری

$$0.2 + 0.5 = \frac{2}{10} + \frac{5}{10} = \frac{7}{10} = 0.7$$

نکته ۱: می توان اعشار را به کسر تبدیل نمود.

نکته ۲: اگر تعداد رقم های اعشاری مساوی بود می توان ممیز را نادیده گرفت حاصل را به دست

آورد و به همان تعداد ممیز زد.

$$3/1 + 2/5 = 13 + 52 = 5/6$$

ضرب و تقسیم اعداد گویا

ضرب عددهای گویا

در ضرب عددهای گویا ابتدا علامت ها را در هم ضرب کرده سپس صورت ها را در هم و مخرج ها را در

هم ضرب می کنیم.

$$\left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(+\frac{1}{7}\right) = -\frac{3}{35}$$

نکته ۱: بهتر است قبل از انجام ضرب عددها را تا حد امکان ساده کنیم.

$$\left(-\frac{9}{24}\right) \times \left(-\frac{12}{27}\right) = +\frac{1}{6}$$

نکته ۲: ابتدا عددهای مخلوط را به کسر تبدیل کنیم.

$$\left(-4\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{9}{2}\right) \times \frac{2}{3} = -3$$

ضرب اعشاری

در ضرب عددهای اعشاری بهتر است با صرف نظر از ممیزها، ابتدا عددها را در هم ضرب کنیم سپس به تعداد رقم هایی که در سمت راست ممیز داریم، برای حاصل از سمت راست ممیز بزنیم.

$$(0/15) \times (-0/4) = -0/060$$

معکوس عدد گویا

اگر در هر کسر جای صورت و مخرج را عوض کنیم معکوس آن بدست می آید.

$$-\frac{4}{9} \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{9}{4}$$

نکته ۱: در معکوس کردن علامت عدد تغییر نمی کند.

نکته ۲: صفر معکوس ندارد چون کسری که مخرج آن صفر باشد تعریف نشده است.

نکته ۳: عددهای مخلوط را به کسر تبدیل کرده سپس معکوس می کنیم.

$$1\frac{3}{5} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{8}{5}$$

تقسیم عددهای گویا

نکته: ابتدا علامت ها را در هم ضرب کرده، سپس عدد اول را در معکوس عدد دوم ضرب می کنیم.

$$\frac{7}{4} \div \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{4} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{7}{10}$$

حاصل ضرب هر عدد در معکوشش مساوی یک می شود.

$$\left(-\frac{6}{7}\right) \times \left(-\frac{7}{6}\right) = +1$$

تبدیل کسر به اعشار

برای تبدیل کسر به اعشار کافیت صورت کسر را برمخرج آن تقسیم کنیم.

مثال:

$$\frac{4}{5} = 0.8$$

محاسبه‌ی عبارت‌های ترکیبی اعداد گویا

در عبارت‌های ترکیبی ابتدا حاصل دسته بندی‌ها (پرانتز - کروشه) را به دست آورده سپس با توجه به علامت بین آنها حاصل کل را محاسبه می کنیم. اگر پرانتز داخل پرانتز یا کروشه داشتیم ابتدا

داخلی ترین را حساب می کنیم.

$$\left[\left(-\frac{3}{5} \right) + \left(+\frac{1}{4} \right) \right] \div \left(1 - \frac{3}{10} \right) =$$

$$\text{کروشه} = -\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{-12+5}{20} = -\frac{7}{20}$$

$$\text{پرانتز} = \frac{10-3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$\text{حاصل نهایی} = -\frac{7}{20} \div \frac{7}{10} = -\frac{7}{20} \times \frac{10}{7} = -\frac{1}{2}$$

در عبارت‌های کسری که در صورت و مخرج آن عبارت‌های دیگری وجود دارد ابتدا حاصل صورت و مخرج را جداگانه به دست آورده و سپس صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{-\frac{1}{12} + \frac{3}{18}}{\frac{3}{4} - \frac{5}{9}} =$$

$$\text{حاصل صورت} = \frac{-3+6}{36} = \frac{3}{36}$$

$$\text{حاصل مخرج} = \frac{27-20}{36} = \frac{7}{36}$$

$$\text{حاصل نهایی} = \frac{3}{36} \div \frac{7}{36} = \frac{3}{36} \times \frac{36}{7} = \frac{3}{7}$$

یادآوری:

در سالهای گذشته ترتیب عملیات ریاضی را فرا گرفتید:

۱ پُرانتز یا کروشه (داخلی ترین)

۲ توان یا رادیکال

۳ ضرب و تقسیم

۴ جمع و تفریق

نکته: اگر دو یا چند هم اولویت داشتیم آنها را از چپ به راست حل می‌کنیم. مثلاً اگر یک عمل ضرب و یک عمل تقسیم در یک عبارت داشتیم، از چپ به راست آنها را ساده می‌کنیم.

حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} =$$

$$\left(\left(-\frac{1}{20} \right) + \left(-\frac{3}{25} \right) \right) \div \left(-\frac{51}{100} \right) =$$

$$\frac{\frac{2}{7} - \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{7}} =$$