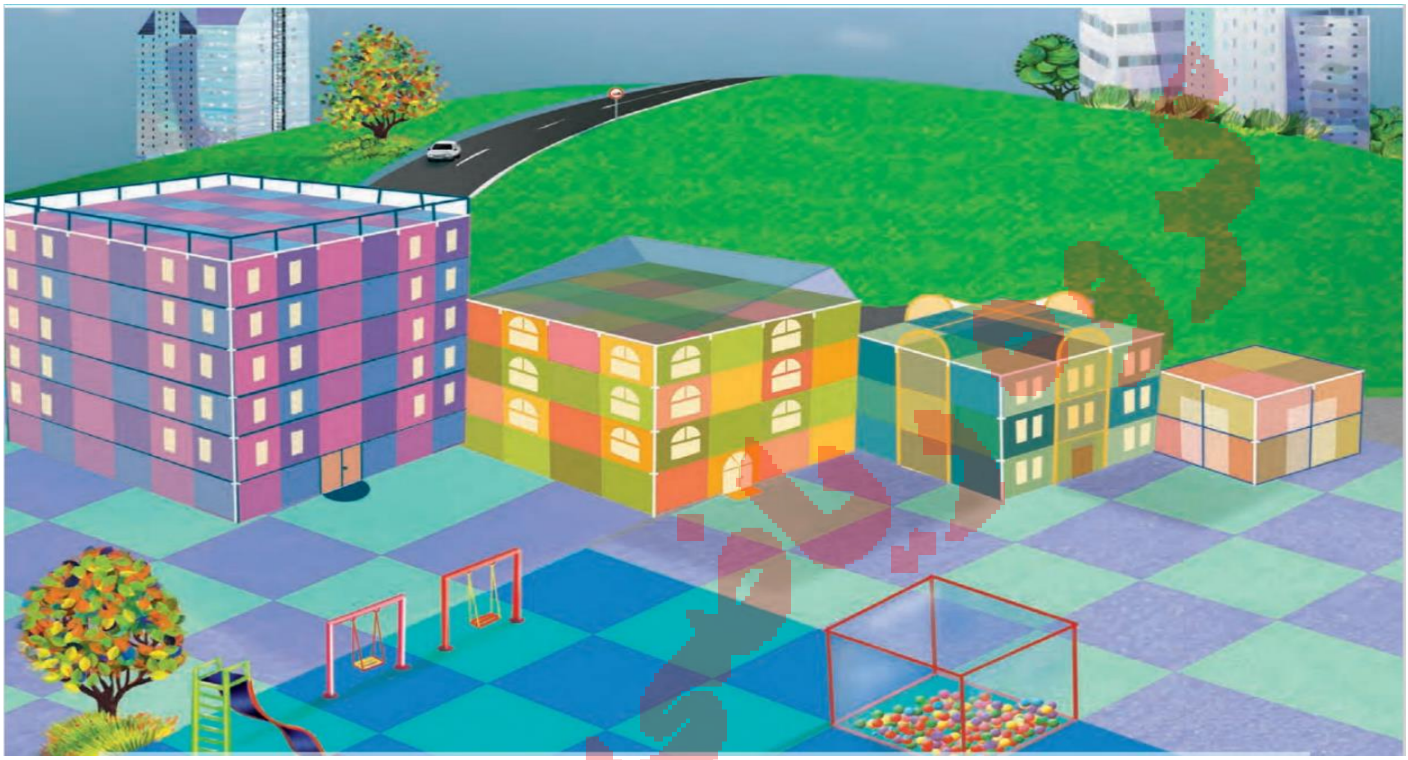
فصــل ۷
تــوان و جــذر



هدف کلی

مطالعه مفاهیم توان و جذر و محاسبات مربوط به آن ها

انتظارات از دانش آموزان در این درس

۱ آشنایی با مفهوم عدد توان دار و محاسبه ی عدد توان دار

۲ انجام ضرب و تقسیم اعداد توان دار

۳ بررسی معادلات توانی

٤ آشنایی با مفهوم جذر و ریشه و محاسبات مربوط به آن

٥ آشنایی با مفهوم مجذور و مکعب

فصل هفتم:

تــوان

جـــذر

بخش اول: مفهوم عدد توان دار

مفهوم عدد توان دار به تکرار جمع ضرب و به تکرار ضرب توان می گوییم.

تعداد $\rightarrow$ ۴× ۳ = ۳+۳+۳+۳

خوانده می شود ۵ به توان ۳ $\longrightarrow$ $\underset{\text{پایه}}{۵}^{۳\ \text{توان}}$ = ۵ ×۵ ×۵

$$\boxed{۵^{۳} \neq ۵\times۳}$$

بخش دوم: ضرب و تقسیم اعداد توان دار

برای ساده کردن عبارات توانی چند قانون وجود دارد:

۱) ضرب اعداد توان دار

الف) اگر دو عدد توان دار با پایه های یکسان درهم ضرب شوند یکی از پایه ها را نوشته و توان هارا جمع می کنیم.

مثال : $۴^{۳} \times ۴^{۱۲} = ۴^{۱۵}$ $x^m \times x^n \longrightarrow x^{m+n}$

ب) اگر دو عدد توان دار در هم ضرب شوند که توان ها مساوی باشند یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

$$(۱۰)^{۷} \times (۰/۵)^{۷} = (۵/۰)^{۷} = ۵^{۷}$$

نکته ۱: گاهی ظاهراً پایه ها برابر نیستند اما با کمی ساده کردن برابر می شوند مانند:

$$۲/۵ = \frac{۵}{۲} = ۲\frac{۱}{۲}$$

یا در مثالی دیگر

$$(۱/۲)^{۲} \times (۱/۲)^{۳} \times (\frac{۶}{۵})^{۷} \times (۱\frac{۲}{۱۰})^{۵} = (۱/۲)^{۲+۳+۷+۵} = (۱/۲)^{۱۷}$$

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۶}{۵} = ۱\frac{۲}{۱۰}$$

نکته ۲: هرگاه عدد توان داری داخل پرانتز باشد و بیرون پرانتز مجدداً یک توان قرار داده شود پایه را نوشته و توان ها را در هم ضرب می کنیم.

قاعده توان در توان $$((a^m)^n)^p = a^{m.n.p}$$

قاعده توان منفی $$\frac{1}{a^{-1}} = a^1 \qquad (\frac{a}{b})^{-m} = (\frac{b}{a})^m$$

۲) قاعده تقسیم اعداد توان دار

هر گاه دو عدد توان دار برهم تقسیم شوند به طوری که:

الف) پایه ها یکسان باشد کافی است:

یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم کنیم.

$$x^m \div x^n = x^{m-n}$$
$$(۰/۵)^۴ \div (۰/۵)^۲ = (۰/۵)^۲$$

ب) هرگاه توان ها یکسان باشند یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را برهم تقسیم می کنیم.

$$x^n \div y^n = (\frac{x}{y})^n$$

مثال:

$$۷^۳ \div ۴^۳ = (\frac{۷}{۴})^۳$$

نکته: هر عدد یا عبارتی که توان ندارد توان آن یک است.

$$3^5 \div 81 \to 3^5 \div 3^4 = 3^1$$ یا ۳

چند نکته درباره اعداد توان دار:

نکته ۱: هر عددی به توان یک برسد برابر است با خود عدد

$x^1 = x \quad \to \quad 10^1 = 10$ مثال $(-1000)^1 = -1000$

نکته۲: یک به هر توانی برسد حاصل برابر یک است با عددیک

$1^x = 1 \qquad 1^{10} = 1 \qquad 1^{1000} = 1$

نکته۳: هر عبارت یا عددی(غیر از صفر) به توان صفر برسد حاصل برابر یک است.

$x^0 = 1 \ (x \neq 0) \quad 100^0 = 1 \quad (-100)^0 = 1$

نکته ۴

- عدد مثبت = $^{\text{زوج}}$(عدد منفی)
- عدد منفی = $^{\text{فرد}}$(عدد منفی)
- مجذور یا مربع = ^{2}(عدد)

نکته۵: حال یک عدد کسری را مثال می زنیم:

اگر عدد داخل پرانتز باشد صورت و مخرج به تعداد توان ضرب می شوند اما اگر عدد کسری داخل پرانتز نباشد عددی به توان می رسد که توان بالای آن قرار گیرد.

$$(\frac{۳}{۲})^{۲} \rightarrow \frac{۳}{۲} \times \frac{۳}{۲} = \frac{۹}{۴}$$

$$\rightarrow (\frac{۳}{۲})^{۲} \neq \frac{۳^{۲}}{۲}$$

$$\frac{۳^{۲}}{۲} \rightarrow \frac{۳ \times ۳}{۲} = \frac{۹}{۲}$$

به نظر شما وجود پرانتز در عبارات توانی اهمیت دارد؟

آیا $(-a)^{n}=-a^{n}$

پاسخ: اگر n توان زوج باشد تساوی نمی تواند برقرار باشد.

$$(-۸)^{۲} \neq -۸^{۲} \quad \rightarrow \quad +۶۴ \neq -۶۴$$

اما اگر n توان فرد باشد تساوی می تواند برقرار باشد.

$$(-۲)^{۳} = -۲^{۳} \quad \rightarrow \quad -۸ = -۸$$

برخی از کاربردهای توان در تجزیه:

الف) تعیین (ب م م) و [ک م م]

[۵۶و۷۷]=$۲^{۳}$×۷×۱۱=۶۱۶

۵۶=۲۳×۷ ۷۷=۷×۱۱ (۵۶و۷۷)=۷

ب) تعیین تعداد شمارنده های یک عدد

$1400 = 2^3 \times 5^2 \times 7$

$(1+3)(1+2)(1+1) = 24$

نکته: در جمع و تفریق اعداد توان‌دار هیچ قاعده خاصی مانند ضرب و تقسیم وجود ندارد یعنی هرعدد جداگانه به توان می رسد و سپس حاصل نهایی را به دست می آوریم.

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید؟

الف) $5^3 - 4^2 + 8^0 = 125 - 16 + 1 = 110$

ب) $(2^7 + 3)^0 \times 2^5 + 2^5 - 3^2$

$1 \times 2^5 + 2^5 - 3^2 \longrightarrow 32 + 32 - 9 = 64 - 9$

ترتیب اولویت:

1. ابتدا داخل پرانتز یا کروشه (داخلی ترین)
2. توان و جذر
3. ضرب و تقسیم (از چپ به راست)
4. جمع و تفریق (از چپ به راست)

مثال) حاصل عبارات زیر را بیابید:

الف) $\frac{۱۲۱ \div ۱۱ - (۴ \times ۳)^{0}}{۵ \times (۱۴ - ۲^{۲})} \longrightarrow \frac{۱۱ - ۱}{۵ \times (۱۴ - ۴)} = \frac{۱۰}{۵۰} = \frac{۱}{۵}$

ب) $(۱۵\times۳)^{۰} - ۵ \times ۲^{۳} - (۹ \div ۳) \times ۳^{۲} = ۱ - ۵ \times ۸ - (۳) \times ۹ \longrightarrow ۱ - ۴۰ - ۲۷ = -۶۶$

محاسبه عبارات توان دار:

به جای حروف اعداد داده شده را جایگزین می کنیم.

مثال) حاصل عبارات زیر را به ازای مقادیر داده شده حساب کنید:

الف) $a^2+b^2-ab \quad (a=-۳ , b=۱)$

پاسخ) $(-۳)^{۲}+(۱)^{۲}-(-۳)(۱) \longrightarrow ۹ + ۱ + ۳ = ۱۳$

ب) $\frac{a^2 + 2ab}{a^2 - b^2} \longrightarrow (a=-۲ , b=-۳)$

پاسخ) $\frac{(-۲)^{۲} + ۲(-۲)(-۳)}{(-۲)^{۲} - (-۳)^{۲}} = \frac{۴ + ۱۲}{۴ - ۹} = \frac{۱۶}{-۵} = -\frac{۱۶}{۵}$

بخش سوم: معـــادلات تـــوانی

۱ پایه های برابر با توان های متفاوت: در این حالت چون پایه ها در دو طرف مساویند توان ها را نیز مساوی قرار می دهیم.

$a^m = a^n \rightarrow m = n$

مثال: مقدارxها را در معادله بیابید:

$۳۶^{۲x-۱}=۶^۴$ $۳۶=۶^۲$

$\rightarrow (۶^۲)^{۲x-۱}=۶^۴ \rightarrow ۶^{۴x-۲}=۶^۴$

$\rightarrow ۴x-۲=۴ \rightarrow ۴x=۶ \rightarrow x=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$

۲ پایه های متفاوت با توان های برابر:

چون توان ها برابرند بنابراین پایه ها نیز برابرند.

$$m^a=n^a \rightarrow m=n$$

مثال: معادله $x^{۱۷}=۶^{۱۷}$ را حل کنید.

$۶^{۱۷}=x^{۱۷} \Rightarrow \boxed{x=۶}$

۳ پایه های متفاوت با توان های متفاوت:

هرگاه در دو طرف تساوی توان ها برابر نباشند و پایه ها هم قابل تجزیه و تبدیل به هم نباشند می توان هر یک را مساوی صفر قرار داد و مجهول را به دست آورید.

مثال: در معادله مقابل مقدار y،a را بیابید.

$$۷^{x-۱}=۳^{y+۲}\begin{cases} x-۱=0 \rightarrow x=۱ \\ y+۲=0 \rightarrow y=-۲ \end{cases}$$

رقم یکان اعداد توان دار

۱ هرگاه رقم یکان عددی یکی از ارقام ۰ و ۱ و ۵ و ۶ باشد به هر توانی برسد رقم یکان آن تغییری نمی کند.

الف) $۶۸۶^{۴۸}$ ⟵ رقم یکان ۶

ب) $۱۲۳۴۵^{۵۵}$ ⟵ رقم یکان ۵

۲ اگر رقم یکان عددی ۴ باشد به توان فرد برسد رقم یکان آن تغییر نخواهد کرد اما اگر به توان زوج برسد رقم یکان آن ۶ خواهد شد.

الف) $۹۱۰۸۴^{۳۹}$ ⟵ چون به توان فرد رسیده رقم یکان ۴

ب) $۴^{۶}$ ⟵ چون به توان زوج رسیده رقم یکان ۶

۳ عدد ۹ هرگاه به توان زوج برسد یکان آن ۱ و هرگاه به توان فرد برسد یکان آن ۹ می شود.

$۹^{۶}$ ⟵ ۱

$۹^{۵}$ ⟵ ۹

مثال: رقم یکان عبارت $۱۴۹^{۱۰} + ۳۱^{۱۳} + ۲۵^{۱۷}$ را بیابید.

$۲۵^{۱۷}$ ⟵ رقم یکان ⟵ ۵

$۳۱^{۱۳}$ ⟵ رقم یکان ⟵ ۱

$۱۴۹^{۱۰}$ ⟵ رقم یکان ⟵ ۱ ⟵ چون ۱۰ توانی زوج است

رقم یکان = ۱+۱+۵=۷

چند مثال برای یادگیری بهتر مطالب

مثال۱: اگر $۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$ باشد حاصل $۲^{۱۴}$ را بیابید:

پاسخ) $۲^{۱۰} \times ۲^{۴} = ۱۰۲۴ \times ۱۶ = ۱۶۳۸۴$

مثال۲: اگر $۲^{x} = ۱۰$ باشد حاصل $۲^{x+۳}$ و $۴^{x-۱}$ را بیابید.

$۲^{x+۳} \longrightarrow ۲^{x} \times ۲^{۳} \to ۱۰ \times ۸ = ۸۰$

$۴^{x-۱} \longrightarrow ۴^{x} \div ۴^{۱} \to (۲^{x})^{۲} \div ۴^{۱} = ۱۰^{۲} \div ۴ = ۱۰۰ \div ۴ = ۲۵$

مثال۳: ثلث عدد $۲۷^{۴n-۲}$ را بیابید.

$$\frac{۱}{۳} \times ۲۷^{۴n-۲} \qquad \frac{۲۷^{۴n-۲}}{۳} \to \frac{(۳^{۳})^{۴n-۲}}{۳^{۱}} \to \frac{۳^{۱۲n-6}}{۳^{۱}} \to ۳^{۱۲n-۶-۱} = ۳^{۱۲n-۷}$$

نکته: خط کسری همان تقسیم است.

مثال۴: حاصل عبارت مقابل را بدست آورید.

$$\frac{-۳^{۲} + ۱^{۸} - ۲^{۲}}{۶^{۲} \div ۲^{۲}} = \frac{-۹ + ۱ - ۴}{۳۶ \div ۴} = -\frac{۱۲}{۹} = -\frac{۴}{۳}$$

مثال۵: حاصل عبارات زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

الف) $۳۲^{۲} \times ۱۶^{۳} \times ۲^{۵} \times ۴^{۷}$

ب) $(\frac{۲}{۳})^{۵} \times (\frac{۴}{۹})^{۳} \times (\frac{۴}{۶})^{۷}$

ج) $۱۶^{-۲} \div \frac{۱}{۸۴}$

د) $(۷ \times ۲۷ + ۲ \times ۹^{۶}) \times ۵^{۷}$

بخش چهارم: جذر و ریشه

جذر و ریشه

علی و محمد باغ گلی دارند به شکل مربع و به مساحت ۱۶ مترمربع که می خواهند دور تا دور آن را نرده کشی کنند به نظر شما بدون استفاده از متر چطور باید تشخیص دهند که چند متر نرده احتیاج دارند؟

❉علی فکری به نظرش می رسد او می گوید می دانیم که **مساحت مربع مساوی حاصلضرب یک ضلع در خودش است** یعنی اگر ضلع مربع را a در نظر بگیریم:

مساحت $=a\times a=a^{2}$

یعنی با داشتن مساحت مربع کافی است فقط بدانیم چه عددی در خودش ضرب شده و مساحت حاصل به دست آمده و بعد با خوشحالی به محمد گفت می دانم هر ضلع به ۴ متر نرده احتیاج دارد به نظر شما آیا جواب علی درست است؟

❉**بله، درست حدس زده است چون ۴×۴ =۱۶ = مساحت مربع**

مثال: دیگری در صفحه ۹۳ کتاب درسی شما آمده بچه های عزیز دقت کنید:

❉مساحت یک زمین بازی کودکان که به شکل مربع است برابر با ۱۴۴ مترمربع است طول ضلع این مربع چند متر است؟

پاسخ) **پس هر ضلع ۱۲ متر است ۱۲ ×۱۲=۱۴۴ = مساحت زمین**

با توجه به مطالب فوق جدول زیر را کامل کنید:

ضلع مربع	۳	۸	۱	۳۰	
مساحت مربع	۹				

$۳۰^{۲}=۹۰۰$ و $۱^{۲}=۱$ و $۸^{۲}=۶۴$

یادآوری: در بخش توان خواندیم که در تساوی $۹=۳^{۲}$ عدد ۹ را توان دوم یا مجذور عدد ۳ می نامیم.

*توان دوم یا مجذور مثلاً ۵ برابر ۲۵ است همچنین توان دوم(۵-) نیز ۲۵ می باشد.

خوب برای راحتی کار و زیبایی جمله از عبارت $\sqrt{}$ استفاده می شود که به آن رادیکال گفته می شود و مجذور(توان دوم) یک عدد زیر رادیکال قرار می گیرد به طول مثال $\sqrt{۳۶}$ که خوانده می شود رادیکال ۳۶ حال می گوییم چه عددی دوبار در خودش ضرب شود تا حاصل ۳۶ به دست آید.

$\sqrt{۳۶} \rightarrow ۶\times۶ \rightarrow$ جذر

$\sqrt{۳۶} \rightarrow (-۶)\times(-۶) \rightarrow$ جذر

پس نتیجه می گیریم هر عدد مثبت دارای دو ۲ ریشه دوم است که یکی قرینه دیگری است.

نکته: اعداد منفی ریشه دوم ندارند چون هیچ عددی را نمی توان یافت که در خودش ضرب شود و حاصل عددی منفی شود.

-آیا عدد (۴۹-) ریشه دوم دارد؟

پاسخ: خیر، زیرا هیچ عددی در دنیا وجود ندارد که به توان ۲ برسد و حاصل آن منفی شود.

تعریف جذر:

عمل جذر، عکس مجذور می باشد که به آن ریشه دوم گفته می شود.

دو نوع جذر داریم:

- جذر های دقیق یا کامل
- جذرهای تقریبی

که ابتدا در مورد جذرهای دقیق بحث می کنیم.

جذرهای دقیق: هر عدد طبیعی که دارای جذر دقیق هستند یا به عبارتی جذر آنها یک عدد صحیح است را مجذور کامل می گوییم.

نکته: جذر اعداد یک و صفر برابر خود عدد است.

$\sqrt{۹} = \sqrt{۳^۲} = ۳$ $\sqrt{۱۰۰} = ۱۰$ $\sqrt{۴} = ۲$ $\sqrt{۱} = ۱$ $\sqrt{0} = 0$

$\sqrt{۶۴} = ۸$ $\sqrt{۴۹} = ۷$ $\sqrt{۳۶} = ۶$ $\sqrt{۲۵} = ۵$ $\sqrt{۱۶} = ۴$

$\sqrt{۱۶۹} = ۱۳$ $\sqrt{۱۴۴} = ۱۲$ $\sqrt{۱۲۱} = ۱۱$ $\sqrt{۱۰۰} = ۱۰$ $\sqrt{۸۱} = ۹$

$\sqrt{۱۹۶} = ۱۴$ $\sqrt{۲۲۵} = ۱۵$ $\sqrt{۲۵۶} = ۱۶$ $\sqrt{۲۸۹} = ۱۷$

$\sqrt{۳۲۴} = ۱۸$ $\sqrt{۳۶۱} = ۱۹$ $\sqrt{۴۰۰} = ۲۰$

نکته: اعداد کمتر از یک مانند ۰/۰۱ و ۰/۰۰۰۱ و ... نیز مجذورکامل هستند.

الف) $\sqrt{۰/۰۱} = \sqrt{۰/۱ \times ۰/۱} = ۰/۱$ یا $\sqrt{\frac{۱}{۱۰۰}} = \frac{۱}{۱۰}$

ب) $\sqrt{۰/۰۰۰۱} = \sqrt{۰/۰۱ \times ۰/۰۱} = ۰/۰۱$

چند نکته

۱ جذر یک حاصلضرب را می توان به حاصل ضرب جذرها تفکیک کرد یعنی:

جمع تفکیک نمی شود، ضرب تفکیک می شود

الف) $\sqrt{۹+۱۶} \neq \sqrt{۹} + \sqrt{۱۶}$

ب) $\sqrt{۶۴\times۳۶} = \sqrt{۶۴} \times \sqrt{۳۶} \longrightarrow ۸\times۶=۴۸$

ج) $\sqrt{۰/۲۵} = \sqrt{۲۵ \times ۰/۰۱} = \sqrt{۲۵} \times \sqrt{۰/۰۱} \longrightarrow ۵\times۰/۱ = ۰/۵$

د) $\sqrt{۳} \times \sqrt{۱۲} \longrightarrow \sqrt{۳\times۱۲} = \sqrt{۳۶} = ۶$

ه) $\sqrt{۰/۵} \times \sqrt{۰/۵} \longrightarrow \sqrt{۰/۲۵} = ۰/۵$

۲ جذر حاصل تقسیم دو عدد با حاصل تقسیم جذرهای آن دو برابر است و بالعکس.

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b\neq0)$ **و بالعکس** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

الف) $\sqrt{\frac{۳۶}{۲۵}} = \frac{\sqrt{۳۶}}{\sqrt{۲۵}} \rightarrow \frac{۶}{۵}$

ب) $\sqrt{\frac{۰/۰۴}{۰/۲۵}} = \frac{\sqrt{۰/۰۴}}{\sqrt{۰/۲۵}} \rightarrow \frac{۰/۲}{۰/۵} = \frac{۲}{۵}$

و یا بالعکس $\frac{\sqrt{۵۴}}{\sqrt{۶}} = \sqrt{\frac{۵۴}{۶}} \rightarrow \sqrt{۹} = ۳$

۳ در مورد جمع یا تفریق این تفکیک صحیح نمی باشد یعنی جذر حاصل جمع یا تفریق دو عدد با حاصل جمع یا تفریق جذرهای آنها برابر نیست.

$$\boxed{\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

الف) $\sqrt{۹\pm۱۶} \neq \sqrt{۹} \pm \sqrt{۱۶}$

ب) $\sqrt{۱۰۰ - ۶۴} \neq \sqrt{۱۰۰} - \sqrt{۶۴}$

مثال: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

الف) $\sqrt{\frac{۳۵}{۱۸}} \div \frac{\sqrt{۵۶}}{\sqrt{۴۵}} = ؟$

پاسخ) $\sqrt{\frac{\cancel{۳۵}^{\,۵}}{\cancel{۱۸}_{\,۲}} \times \frac{\cancel{۴۵}^{\,۵}}{\cancel{۵۶}_{\,۸}}} = \sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}} = \frac{۵}{۴}$

نکته: جذر اعداد بین صفر و یک از خود عدد بزرگتر است

$۰ < x < ۱ \longrightarrow \sqrt{x} > x$

مثال) $\sqrt{۰/۲۵} = ۰/۵ \longrightarrow ۰/۵ > ۰/۲۵$

مثال) $\sqrt{۰/۰۴} = ۰/۲ \longrightarrow ۰/۲ > ۰/۰۴$

جذر تقریبی اعداد $\simeq$

برخی اعداد مانند ۶۰ جذر دقیق ندارند برای بدست آوردن جذر تقریبی این مدل اعداد مراحل زیر را طی می کنیم:

الف) ابتدا مشخص می کنیم عدد ۶۰ بین کدام دو جذر دقیق قرار دارد.

یک نکته را لازم است اشاره کنم که این دو عدد صحیح متوالی هستند.

جذر دقیق قبل < $\sqrt{۶۰}$ < جذر دقیق بعد

$\sqrt{۶۰}$ بین دو عدد متوالی ۷ و ۸ قرار دارد.

$$\sqrt{۴۹} < \sqrt{۶۰} < \sqrt{۶۴}$$

$$۷ < \sqrt{۶۰} < ۸$$

ب) مرحله ی بعد: میانگین دو عددی را که ۶۰ بین آنها قرار دارد را پیدا می کنیم و بعد میانگین را به توان ۲ می رسانیم.

$$\frac{۷+۸}{۲} = ۷/۵ \longrightarrow (۷/۵)^۲ = ۵۶/۲۵$$

ج) اگر مجذور میانگین از جذر خواسته شده بزرگتر باشد یک دهم یک دهم کم می کنیم و اگر کوچک تر باشد یک دهم یک دهم بیشتر می کنیم

هر بار مجذور را حساب می کنیم و عدد نزدیک به ۶۰ را انتخاب می کنیم.

$۵۶/۲۵ < ۶۰$

د) در نهایت مقدار تقریبی می باشد برای راحتی کار مطالب را می توان در یک جدول مرتب کرد .

$۷ / ۷ \simeq \sqrt{۶۰}$ که به ۸ نزدیک تر است تا به ۷

۷/۹	۷/۸	۷/۷	۷/۶	۷/۵	عدد
	۶۰/۸۴	۵۹/۲۹	۵۷/۷۶	۵۶/۲۵	مجذور

مثال صفحه۵۵ کتاب– مشخص کنید:

الف) عدد $\sqrt{۲۸}$ بین کدام دو عدد طبیعی قرار دارد؟

ب) به کدام یک نزدیکتر است؟

ج) جدول را کامل کنید؟

پاسخ الف) $\sqrt{۲۵} < \sqrt{۲۸} < \sqrt{۳۶}$ بین ۶ و ۵ هست

پاسخ ب) با رسم جدول می بینیم مجذور ۵/۳ تقریبا ۲۸ می شود و ۵/۳ به ۵ نزیکتر است.

۵/۴	۵/۳	۵/۲	۵/۱	۵	عدد
۲۹/۱۶	۲۸/۰۹	۲۷/۰۴	۲۶/۰۱	۲۵	مجذور

بیشتر بدانیم:

۱ ساده کردن رادیکال:

برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی با ریشه۲ (فرجه) در صورت امکان می توان عدد زیر رادیکال را به صورت ضرب دو عدد نشان داد که یکی از آنها جذر داشته باشد مثلا

الف) $\sqrt{۵۰} = \sqrt{\underbrace{۲۵}_{۵ \text{جذر}}\times ۲} \to ۵\sqrt{۲}$

ب) $\underbrace{۶}_{\text{ضریب}}\sqrt{۸} \to ۶\sqrt{۴\times ۲} \to ۶ \times ۲\sqrt{۲} \to ۱۲\sqrt{۲}$

نکته: جذر در ضریب رادیکال ضرب می شود.

۲ جمع و تفریق رادیکال ها:

در صورتی دو عبارت رادیکالی با ریشه ۲ با هم جمع و تفریق می شوند که عدد زیر رادیکال ها یکسان باشد در این صورت کافی است ضریب ها را با هم جمع و تفریق کنیم.

الف) $۵\sqrt{۲} + ۶\sqrt{۲} = ۱۱\sqrt{۲}$

ب) $۴\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۳} + ۱۰\sqrt{۳} = ۱۱\sqrt{۳}$

تذکر: در جمع و تفریق رادیکال ها گاهی الزم است ابتدا رادیکال ها را ساده کنیم.

الف) $۵\sqrt{۷۲} - ۶\sqrt{۳۲}$

$\to ۵\sqrt{\underbrace{۳۶}_{۶\text{جذر}}\times ۲} - ۶\sqrt{۱۶\times ۲}$

$\to \underbrace{۵}_{\text{ضریب}} \times ۶\sqrt{۲} - ۶ \times ۴\sqrt{۲} \quad \to ۳۰\sqrt{۲} - ۲۴\sqrt{۲} = \boxed{۶\sqrt{۲}}$

ب) $5\sqrt{18} - 6\sqrt{32}$

$\rightarrow 5\sqrt{\underbrace{9}_{\text{جذر}3}\times 2} - 6\sqrt{\underbrace{16}_{\text{جذر}4}\times 2}$

$\rightarrow 5 \times 3\sqrt{2} - 6 \times 4\sqrt{2} \rightarrow 15\sqrt{2} - 24\sqrt{2} = \boxed{-9\sqrt{2}}$

ضرب و تقسیم رادیکالها:

ضرب و یا تقسیم رادیکال ها در صورتی امکان پذیر است که حتماً ریشه های آنها برابر باشند.

(مثال) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$

چند مثال برای یادگیری بهتر مطالب(پیشرفته)

۱جذرهای دقیق زیر را حساب کنید؟

الف) $\sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10} = 0/6$

ب) $\sqrt{\cancel{14}^{\,7} \times \frac{7}{\cancel{2}_{\,1}}} = \sqrt{49} = 7$

ج) $\sqrt{25 \times 4} = \sqrt{100} = 10$

د) $\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{3+1}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

هـ) $\sqrt{۳\times۲۷} \times \sqrt{۲۵} = \sqrt{۸۱} \times \sqrt{۲۵} = ۹ \times ۵ = ۴۵$

۲ حاصل عبارت $\sqrt{۱+۲\sqrt{۱+۳\sqrt{۱+۴\sqrt{۱+۵\sqrt{۷(۱+۶)}}}}}$ را بیابید.

پاسخ) از داخلی ترین رادیکال شروع به حل می کنیم.

$$\sqrt{۱+۲\sqrt{۱+۳\sqrt{۱+۴\sqrt{۱+۵\times۷}}}} \rightarrow \sqrt{۱+۲\sqrt{۱+۳\sqrt{۱+۴\times۶}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱+۲\sqrt{۱+۳\times۵}} \rightarrow \sqrt{۱+۲\times۴} = \sqrt{۱+۸} = \sqrt{۹} = ۳$$

۳ مقدار عبارت $\sqrt{۷۵}+۳\sqrt{۲۷}-۲\sqrt{۳}-\sqrt{۴۸}$ کدام است؟

$۱۱\sqrt{۷}$　$۷\sqrt{۱۱}$　☑ $۸\sqrt{۳}$　$۳\sqrt{۸}$

$\sqrt{۳\times۲۵}+۳\sqrt{۹\times۳}-۲\sqrt{۳}-\sqrt{۱۶\times۳}$

$۵\sqrt{۳}+۳\times۳\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}-۴\sqrt{۳}=۸\sqrt{۳}$

جمع و تفریق اعداد توانی

گاهی باید تعداد اعداد توان دار را به صورت ضریب کنار آنها نوشته می شود. مثلاً

۴×۳^۷ یعنی ۴ تا $۳^۷$ و اگر عددی نباشد یعنی ضریب آن یک است.

$۸\times۵^۷+۳۰\times۵^۷-۱۴\times۵^۷+۵^۷=$

$۲۵\times۵^۷ \rightarrow ۵^۲\times۵^۷=۵^۹$